

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXIX - ANNO CXLI

(2002)



LIGUORI EDITORE









SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO  
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE  
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXIX - ANNO CXLI

*(2002)*

LIGUORI EDITORE

Il presente volume è stato realizzato con il contributo della Regione Campania

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'editore. Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, CONFCOMMERCIO, CONFESERCENTI il 18 dicembre 2000. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiori al 15% del presente volume, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail [aidro@iol.it](mailto:aidro@iol.it).

Prima edizione italiana Dicembre 2002

Liguori Editore, Srl

via Posillipo 394

I 80123 Napoli

<http://www.liguori.it>

Copyright © Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 2002

Napoli : Liguori, 2002

ISBN 88 - 207 - 3535 - 0

*Ristampe:*

---

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0    2010 2009 2008 2007 2006 2005 2004 2003 2002

Questo volume è stato stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a pH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

## INDICE

|                                                                                                                                                                                                  |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| L. Miele - <i>On a particular elliptic equation with discontinuous coefficients</i>                                                                                                              | pag. 7 |
| A. D'Argenio, T. Pescatore, M.R. Senatore, G. Bisogno, G. Tocco - <i>Effects of Natural Events on Ancient Benevento, Southern Italy</i>                                                          | » 13   |
| R. Sersale - <i>Il METACAOLINO: eccellente "pozzolana" e materia prima per la produzione di nuovi materiali cementanti</i>                                                                       | » 27   |
| P. De Martino, A. Drago - <i>Introduzione alla matematica costruttiva</i>                                                                                                                        | » 37   |
| G. Frigione, L. Bonavita - <i>Zeoliti sintetiche per cementi pozzolanici</i>                                                                                                                     | » 51   |
| M.R. Formica - <i>Beltrami operators in the plane</i>                                                                                                                                            | » 59   |
| S. Rionero, F. Perrini - <i>On the nonlinear diffusion in half spaces with application to the porous media</i>                                                                                   | » 71   |
| F. Acanfora, M. Squillante - <i>Alcune osservazioni su una disequazione variazionale del quarto ordine</i>                                                                                       | » 83   |
| L. Carbone, G. Cardone, L. Faella - <i>L'epistolario Genocchi-Sella (1851-1883). Parte seconda: Il commento</i>                                                                                  | » 93   |
| R. Sersale - <i>Degrado chimico del calcestruzzo di cemento per reazione alcali-carbonato</i>                                                                                                    | » 137  |
| L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, N. Palladino - <i>Il fondo di antichi libri scientifici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli: Cataloghi ragionati</i> | » 145  |
| R. Russo, G. Starita - <i>Boundary value problems for harmonic functions on Lipschitz domains</i>                                                                                                | » 279  |



## On a particular elliptic equation with discontinuous coefficients

Nota di Luigia Miele

Presentata dal Socio Carlo Sbordone  
(Adunanza dell'11 gennaio 2002)

**Abstract** - A different proof of a  $W^{2,2}$  estimate for solutions of particular non divergence elliptic equation in  $n \geq 2$  dimension due to C. Miranda, is given

**Riassunto** - Si presenta una nuova dimostrazione di una stima in  $W^{2,2}$  per soluzioni di una particolare equazione ellittica in forma di non divergenza considerata da C. Miranda

### 1 INTRODUCTION

Let  $\Omega$  be an open set in  $R^n$  contained in the cube

$$\Omega = \{x \in R^n : |x_i| \leq a\}$$

Let  $a_i = a_i(t)$  be defined for  $|t| \leq a$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  and verify

$$0 < m_0 \leq a_i(t) \leq m_1 < \infty$$

Consider the non-divergence elliptic equation

$$Lu = \sum_{i=1}^n a_i(x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x) \quad (1)$$

where  $f$  is a given  $L^2(\Omega)$  function. In [M] C. Miranda proved the following

**Theorem 1.1.** *For any solution  $u \in W^{2,2}(\Omega)$  of the Dirichlet problem*

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

the inequality

$$\sum_{1,k}^{1,\dots,n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 x}{\partial x_i \partial x_k} dx \leq \frac{m_1^{n-2}}{m_0^n} \int_{\Omega} f^2 dx$$

holds.

Here we prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

solve an elliptic equations in divergence form. Namely we have the following

**Theorem 1.2.** *Given  $a_i(t)$  and  $u \in H_0^1$  such that*

$$0 < \frac{1}{K} = m_0 \leq a_i(t) \leq m_1 = K,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{a_j(x_j)}{A(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \frac{f}{A(x)} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

where

$$A(x) = \prod_{i=1}^n a_i(x_i)$$

Let  $v = \frac{\partial u}{\partial x_1}$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)f}{A(x)} \right) \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

## 2 THE MAIN THEOREM

In this section we give the proof of Theorem 1.2

*Proof.* Starting from (2), in the first step we multiply right and left hand side for  $a_1(x_1)$  then, derivating respect to  $x_1$  in the right hand side, we obtain

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{j=1}^n a_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} \partial x_j \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n a_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \\
& \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right) + \sum_{j=1}^n a_1(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) = \\
& \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n a_1(x_1) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) = \\
& \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \left( \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) + a_1(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) \right) = \\
& \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) \right)
\end{aligned}$$

Since

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq 1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq 1} a_k(x_k)} \right) & \text{if } j = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq 1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq 1} a_k(x_k)} \right) & \text{if } j = 1 \end{cases}$$

furthermore we observe that

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right)$$

then we have

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \right) \right) = \\
& \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}
\end{aligned}$$

From which we obtain the thesis □

**Corollary 2.1.** *In the same hypothesis of Theorem (1.2) for every solution  $u$  of (1)*

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \sqrt{\gamma} K^N \|f\|_{L^2}$$

hold

*Proof.* We take  $\varphi = u$  as test function ( $\varphi \in H_0^1$ ) from (1) we have

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{a_j(x_j)}{A} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_{\Omega} \frac{f}{A} u$$

From Hypothesis , from Hölder and Poincarè inequalities we have

$$\frac{1}{K^{n-1}} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{a_j(x_j)}{A} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 =$$

$$\int_{\Omega} \frac{f}{A} u \leq \left( \int_{\Omega} \frac{f^2}{A^2} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} u^2 \right)^{1/2} \leq \gamma^{1/2} \left( \int_{\Omega} \frac{f^2}{A^2} \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

From this we have

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{\gamma} K^{n-1} \left( \int_{\Omega} \frac{f^2}{A^2} \right)^{1/2} \leq \sqrt{\gamma} K^n \left( \int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2}$$

from which we obtain the thesis □

**Corollary 2.2.** *In the same hypothesis of Theorem (1.2) for every solution  $u$  of (1) we have*

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \leq K^{2n-1} \|f\|_{L^2}$$

*Proof.* in (2) we take  $\varphi = v$  as test function and obtain

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 = \int_{\Omega} \frac{a_1(x_1)}{A} f \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

From hypothesis we have  $\frac{1}{K} \leq a_i(x_i) \leq K$  then

$$\frac{1}{K^{n-1}} \leq \prod_{k \neq j} a_k(x_k) \leq K^{n-1}$$



taking the inverse

$$\frac{1}{K^{n-1}} \leq \frac{1}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \leq K^{n-1}$$

if  $j = 1$  we have

$$\frac{1}{K^n} \leq \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq 1} a_k(x_k)} \leq K^n$$

otherwise

$$\frac{1}{K^{n-2}} \leq \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \leq K^{n-2}$$

From these we obtain

$$\frac{1}{K^n} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 + \frac{1}{K^{n-2}} \sum_{j=2}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 \leq \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{a_1(x_1)}{\prod_{k \neq j} a_k(x_k)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^2 =$$

$$\int_{\Omega} \frac{a_1(x_1)}{A} f \frac{\partial v}{\partial x_1} \leq K^{n-1} \int_{\Omega} f \frac{\partial v}{\partial x_1} \leq K^{n-1} \left( \int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 \right)^{1/2}$$

from this obtain

$$\left( \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 \right)^{1/2} \leq K^{n-1} K^n \left( \int_{\Omega} f^2 \right)^{1/2}$$

from which we obtain the thesis □

## References

- [M] C. Miranda, 'Su di una particolare equazione ellittica a coefficienti discontinui', *Analele Stiintifice Univ. AL.I. Cuza Din Iasi* XI, (1965), 209-216.



## Effects of Natural Events on Ancient Benevento, Southern Italy

Nota di A. D'Argenio<sup>1</sup>, T. Pescatore<sup>1\*</sup>, M. R. Senatore<sup>1</sup>,  
G. Bisogno<sup>2</sup> and G. Tocco<sup>2</sup>

Presentata dal socio Damiano Stanzione  
(Adunanza del 1 febbraio 2002)

*Key words:* Benevento, geoarchaeology, stratigraphy

**Abstract** - Integration between geological and archaeological stratigraphy and historical data has allowed the reconstruction of the environmental history of the site where the town of Benevento (Campania, Southern Italy) was founded and developed. Benevento is located within the Campanian Apennine, at the confluence of the Calore and Sabato rivers and it is built on a Quaternary hill encircled by alluvial terraces. Its history may be divided in four major time-intervals: (i) Pre-Quaternary geologic history of the region, (ii) Late Pleistocene continental evolution of the town site, (iii) development of the Present fluvial environment and (iv) Roman and Longobardic geologic/geomorphologic events. During the last of these steps, the lower part of Benevento was several times damaged or almost destroyed by earthquakes and buried by floods. Only the events that occurred during periods of economic decadence left traces in the geological record, due to lack of restoration. This study evidences the importance of an integrated geological/human approach in the understanding of the Holocene stratigraphy, underlining the influence of geological events on human life and of the role of the anthropic activity on the stratigraphic record.

**Riassunto** - L'uso integrato di dati stratigrafici geologici ed archeologici e di fonti storiche ha consentito la ricostruzione della storia naturale del sito in cui fu fondata e si sviluppò la città di Benevento (Campania, Italia meridionale).

Benevento è situata nell'Appennino Campano, alla confluenza dei fiumi Calore e Sabato ed è costruita su di una collina quaternaria circondata da terrazzi fluviali. La storia del sito può essere suddivisa in quattro intervalli di tempo principali: (i) Storia geologica pre-quaternaria della regione; (ii) Evoluzione tardo pleistocenica dell'area cittadina; (iii) Sviluppo dell'ambiente fluviale attuale; (iv) Eventi geologici e processi geomorfologici di epoca romana e longobarda.

---

<sup>1</sup> Dipartimento di Studi Geologici e Ambientali, Università del Sannio, via Port'Arsa 11 – 82100 Benevento, Italy

<sup>2</sup> Soprintendenza Archeologica di Salerno, Avellino e Benevento, via Trotula De Ruggiero - 84100, Salerno

\* Author to whom correspondence should be addressed

Durante l'ultimo di questi intervalli, la parte inferiore di Benevento è stata a più riprese danneggiata o quasi completamente distrutta da terremoti e seppellita da alluvioni. Tuttavia, solo gli eventi che si verificarono in periodi di decadenza economica hanno lasciato tracce nel *record* geologico, probabilmente a causa della mancanza di interventi di restauro ad opera dell'uomo. Questo studio mette in evidenza l'importanza di un approccio integrato tra le scienze naturali ed umane nella comprensione della stratigrafia dell'Olocene, sottolineando l'influenza degli eventi geologici sulle attività umane ed il ruolo di queste ultime sul *record* stratigrafico.

## 1. INTRODUCTION

Benevento is located about 60 km North-east of Naples, in the internal areas of the Campanian Apennine, Southern Italy (fig. 1), and was the site of Oscan-Samnite settlement since 5<sup>th</sup> century B.C. (the ancient Maleventum). Subsequently, it was conquered by Romans after the war against Pirrus (275 B.C.).

This town has always been the most important Samnium settlement. The early part of Benevento is located at the confluence of the Calore and Sabato rivers, at the top and on the sides of a hill formed by Quaternary fluvial conglomerates deposited during the last glacial epoch.

The town's history has been largely influenced by its position and geology. The seismicity of the Apenninic region and repeated flooding produced abandonment and re-colonization of peripheral settlements, while the upper part of the town was more permanently inhabited.

Integrating geological, historical and archaeological data serves to interpret the main events affecting the evolution of the site where Benevento developed.

## 2. MATERIALS AND METHODS

The geological information pertaining to Benevento is derived from three main categories: (i) regional stratigraphy and tectonics, (ii) geomorphology of fluvial terraces and (iii) high resolution stratigraphy from about 300 boreholes.

Archaeological data (including age of buildings and elevation of their floor at the very time of their construction) and historical sources help to define the age of floods and of fluvial terrace development that affected the area. A sequence of natural events, supported by geological maps and stratigraphic sections, is presented here.

## 3. GEOLOGICAL SETTING AND ARCHAEOLOGICAL FRAMEWORK

Neogene – Quaternary deposits crop out in the studied area (figs. 1 and 3). Quaternary deposits were deposited on a deformed Neogene substratum comprising siliciclastic and carbonate rocks belonging to Lagonegro (Late Cretaceous – Early Miocene), Altavilla (Early Pliocene – Middle Pliocene) and Ariano (Middle Pliocene) tectono-stratigraphic units.

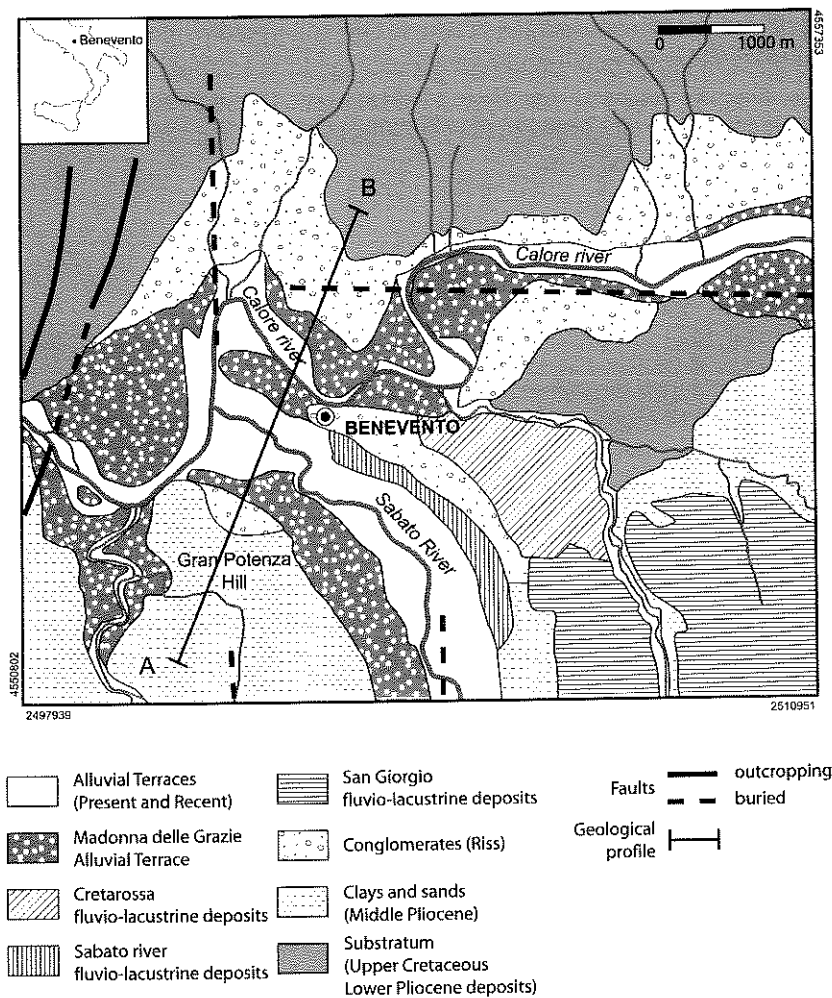


Figure 1. Geological map of the Benevento Region. Geologic profile refers to profile in fig. 2. (Modified from Pescatore *et al.*, 1996)

Deformation of the Neogene substrate during the Pliocene produced a depression (the Benevento Basin) that was progressively filled by Pliocene marine and Quaternary continental deposits (figs. 1 and 2). The tectonic framework of this basinal area was controlled by E-W and N-S trending normal faults and related NE dipping Pliocene homoclines (Pescatore *et al.*, 1996). These faults, active during most of the Pliocene, controlled the available accommodation space on which the Quaternary continental deposits accumulated (fig. 2). The major fault in the studied area, located the north of Benevento, delimited the Pliocene deposits in the study area (fig. 1).

Benevento is located at the confluence of the Calore and the Sabato rivers (figs. 1 and 3). The upper part of the town is located on a topographic high

formed of conglomerates and sands whose age is derived by correlation of these deposits with correspondent analogous outcrops located few kilometres west of the area, and attributed to the Riss by Malatesta (1958). In the town centre, these Riss conglomerates are covered by fluvio-lacustrine deposits and alluvial terraces (figs. 1, 2, 3 and 4).

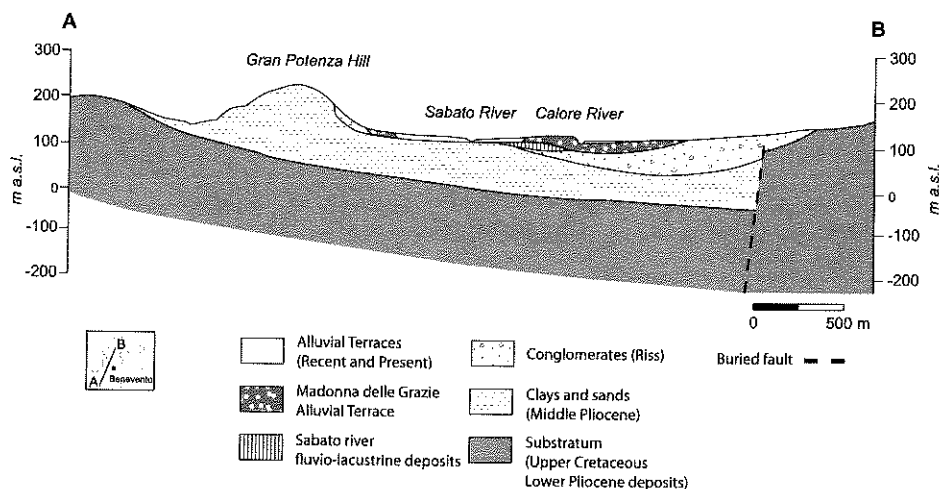


Figure 2. Geological section across the Benevento Basin.

Many ancient buildings and archaeological remains in the town of Benevento provide a means to interpret its history. Among these, and of special interest here, are the ruins of the Roman theatre and amphitheatre, and the Longobardic town walls (fig.3).

The Roman theatre and amphitheatre are located outside the Roman city walls, on two different alluvial terraces of the Sabato River (figs. 3 and 5). The theatre surface lies at an elevation of 116.75 m while the amphitheatre is at 112.90 m. Both structures are 2 m below the present day topographic surface. Both structures are dated to the 1<sup>st</sup> century A.D. The theatre location has been always known, even if parts of its structure were later incorporated into Middle Age buildings. Theatre restoration started during the 1920s and was completed in the 1960s. On the other hand, the amphitheatre infrastructures were discovered in 1985. The amphitheatre was believed to be a wood structure, because no outcropping stone ruins were found. According to Tacitus, in 63 A.D., a very important gladiatorial performance in honour of Nero was carried out in this amphitheatre (Neppi Modona, 1961). In 369 A.D. an earthquake of major intensity hit the city of Benevento. This earthquake, described by Simmaco Seniore, damaged the theatre and the amphitheatre that were abandoned, with sporadic performances until the 5<sup>th</sup> century. In the 6<sup>th</sup> century, in the area of amphitheatre, by there buried by alluvial deposits, was covered by a necropolis.

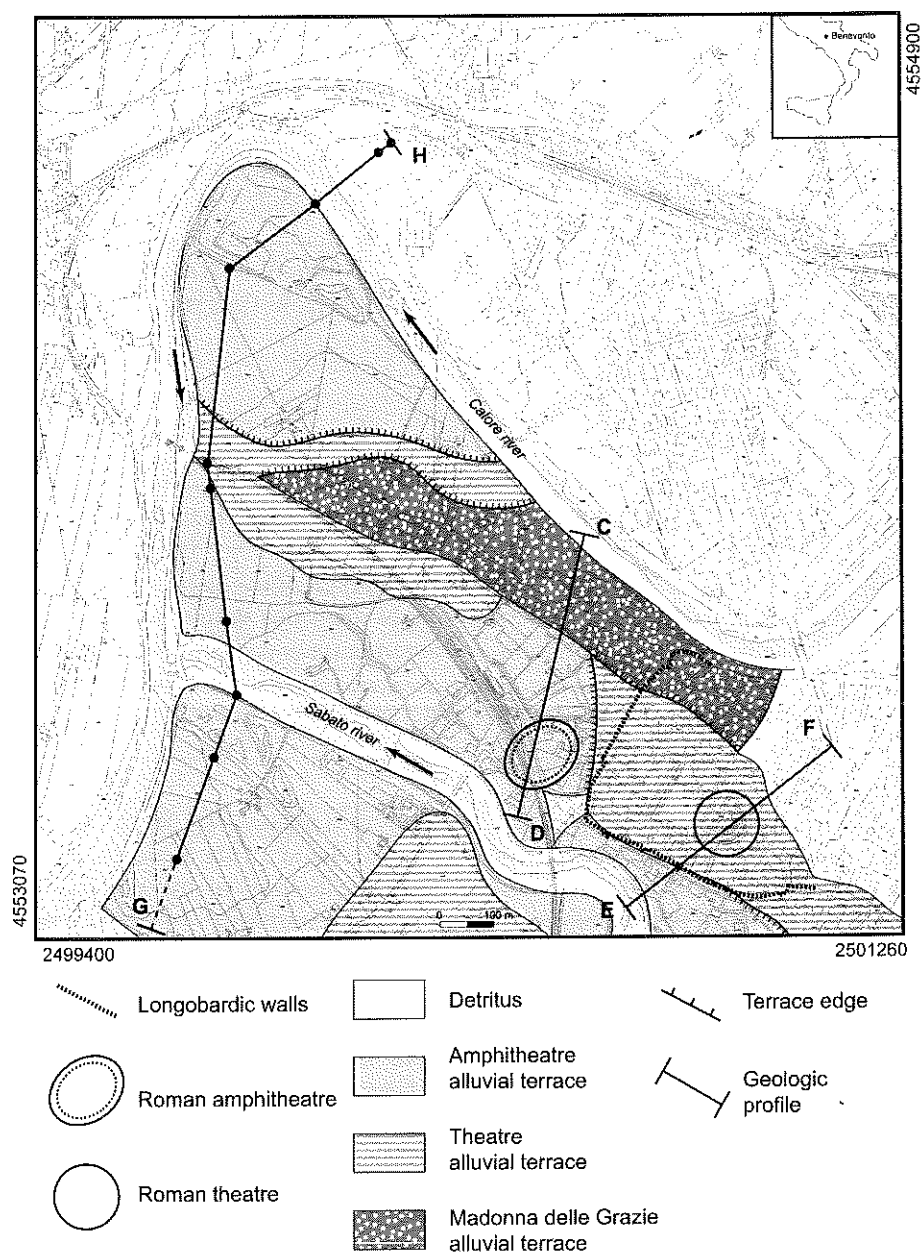


Figure 3. Alluvial terraces in the city of Benevento. Geologic profiles refers to sections in figs. 4 and 5.

After the 369 A.D earthquake, the Roman town of Benevento began to decline. The declining economic condition of the whole area is recorded by the edict promulgated in 395 A.D. by the emperors Onorio and Adriano that

cancelled the land tax over 130,000 hectares of arable land that had been abandoned by the population and were no longer tilled (Rotili, 1986). During the 5<sup>th</sup> and 6<sup>th</sup> centuries A.D. a series of military attacks on the region were made by German populations: in 410 A.D. by the Alarico Visigoths; between 445-465 A.D. during military campaign of the Vandals; and between 535-552 A.D. during the Goth-Byzantine war. In 571 A.D. Longobards arrived in Benevento, and between the 6<sup>th</sup> and 7<sup>th</sup> centuries they built the city walls that, on the side of the theatre, followed the edge of the alluvial terrace. During their domination (571-774 A.D.) the Benevento region flourished once-again and became a dukedom.

#### 4. STRATIGRAPHY

Deposits that outcrop in the Benevento area (fig. 1) accumulated over a long period and record the complex geologic history of the region. The oldest formations, of Late Mesozoic and Neogenic age, reached their present position during deformation and uplift phases of the Apenninic chain.

Quaternary deposits lie unconformably upon this deformed substratum (fig. 2). The age of the deformation is contemporaneous to the deposition of the Pliocene marine succession, and the available accommodation space for continental sediments was tectonically controlled by E-W trending normal faults, that in large part controlled the formation of the Benevento Basin (figs. 1 and 2).

The base of the Quaternary succession is formed by conglomerates that filled this basin and now crop out along the flanks of the Calore river (fig. 1). Here they form a hill, 70 m higher than the bottom of the river valley, that served as the occupational site of the continuously inhabited sector of Benevento. The age of these deposits is uncertain but they have been correlated with similar ones exposed northwest of Benevento and attributed by Malatesta (1958) to the Riss glacial stage. The conglomerates are polymictic (mostly carbonates), heterometric (up to boulder in size), well rounded and usually cemented by calcareous encrustations. Clasts are embedded in a sandy matrix and are commonly red or brown as result of iron encrustations. Conglomerates are irregularly bedded or show inclined stratification; locally slight normal gradation is recorded. Sandy and silty intercalations commonly occur within the conglomerates. The thickness of these deposits exceeds 100 m and they occur in subsurface north and south the Calore river.

The Riss conglomerates and the Neogenic substratum are covered by the eroded remains of fluvio-lacustrine deposits. Three of these cycles (San Giorgio, Sabato and Cretarossa) have been recognized by Pescatore *et al.* (1996), in outcrop along the flanks of the Sabato river (figs. 1, 2 and 4). The age of these cycles remains undefined as well as the nature of their contact with the underlying conglomerates of Riss age.



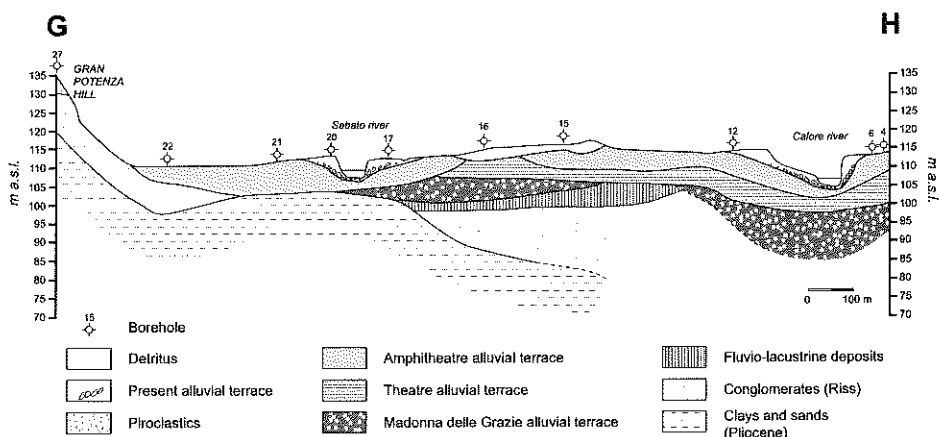


Figure 4. Geological profile across the peripheral areas of the Benevento site. The section is derived primarily by core data (core numbers are indicated).

The lowest one, the San Giorgio cycle (fig. 1), comprises heterometric, polygenic gravels with a sandy matrix. Lenses of coarse sands and silty clays, often rich in organic material, are intercalated within the gravel units. The San Giorgio deposits outcrop on the right flank on the Sabato river, and are about 50 m thick.

The middle cycle (Sabato) deposits are mapped on the left flank of the Sabato river, and these extend toward the confluence of the two streams (figs. 1, 2 and 4). They are recognized in borings, covered by detritus. The base of the cycle is formed by heterometric and polygenic blackish gravels in sandy matrix; this sequence continues upward by greyish silty clays with sandy and silty intercalations and peat. The thickness of this succession is about 50 m.

The upper cycle (Cretarossa) outcrops, on the right flank of the Sabato river, lie directly on the Riss conglomerates (fig. 1). These are formed by darkish and yellowish clays with sandy and gravely intercalations. The Cretarossa cycle is 20 m thick, and is about 70 m higher than the bottom of the Calore valley.

After deposition, the fluvio-lacustrine deposits were deeply incised by river erosion. Calore and Sabato alluvial processes lead to the formation of a number of terraces. Three of these (Madonna delle Grazie, Theatre and Amphitheatre terraces), identified on geomorphological evidence (primarily elevation), record the final stages of the Present fluvial environment (figs. 1, 3, 4 and 5).

The older alluvial terrace (Madonna delle Grazie) rises about 20 m above the bottom of the Calore and Sabato valleys (fig. 5), and comprises by coarse sediments (well rounded polygenic and heterometric gravels with a silty and sandy matrix) with intercalated sand and silt lenses. The top of this terrace is covered by the Campanian Ignimbrite grey tuffs (37 ky B.P.).

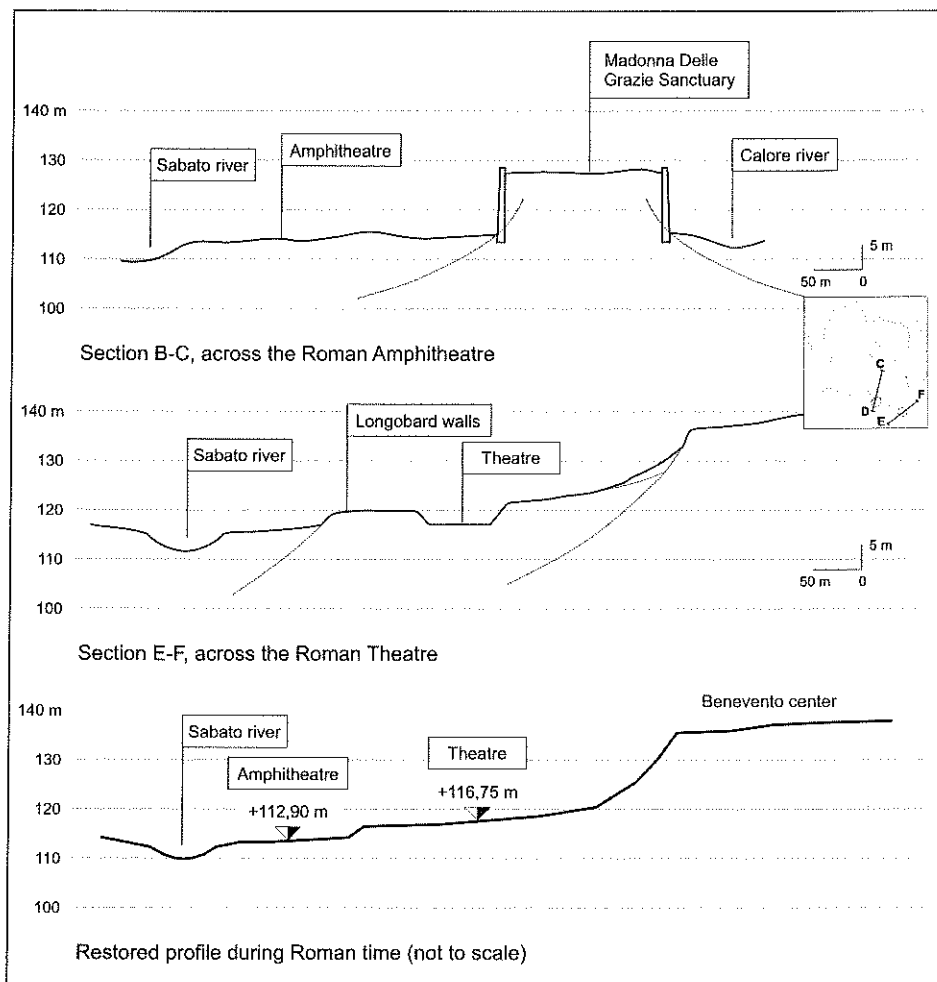


Figure 5. Geological sections across the alluvial deposits of Benevento showing the geometry and elevations of the alluvial terraces. A paleogeographic reconstruction of the Roman morphology is shown in the profile at the bottom of the figure.

On top of the Madonna delle Grazie deposits two other alluvial terraces, consisting of gravels with a silty and sandy matrix and intercalations of finer sediments, are recognized.

On the older of these terraces the Roman theatre was built. The top surface of the terrace is at an elevation of about 119 m above sea level (fig. 5). This elevation is about 2 m higher than the Roman theatre surface, located at 116.75 m above sea level. The younger terrace, where the Roman amphitheatre was built, has an average elevation of about 115 m above sea level, while the Roman amphitheatre surface elevation is at 112.90 m above sea level (fig. 5).

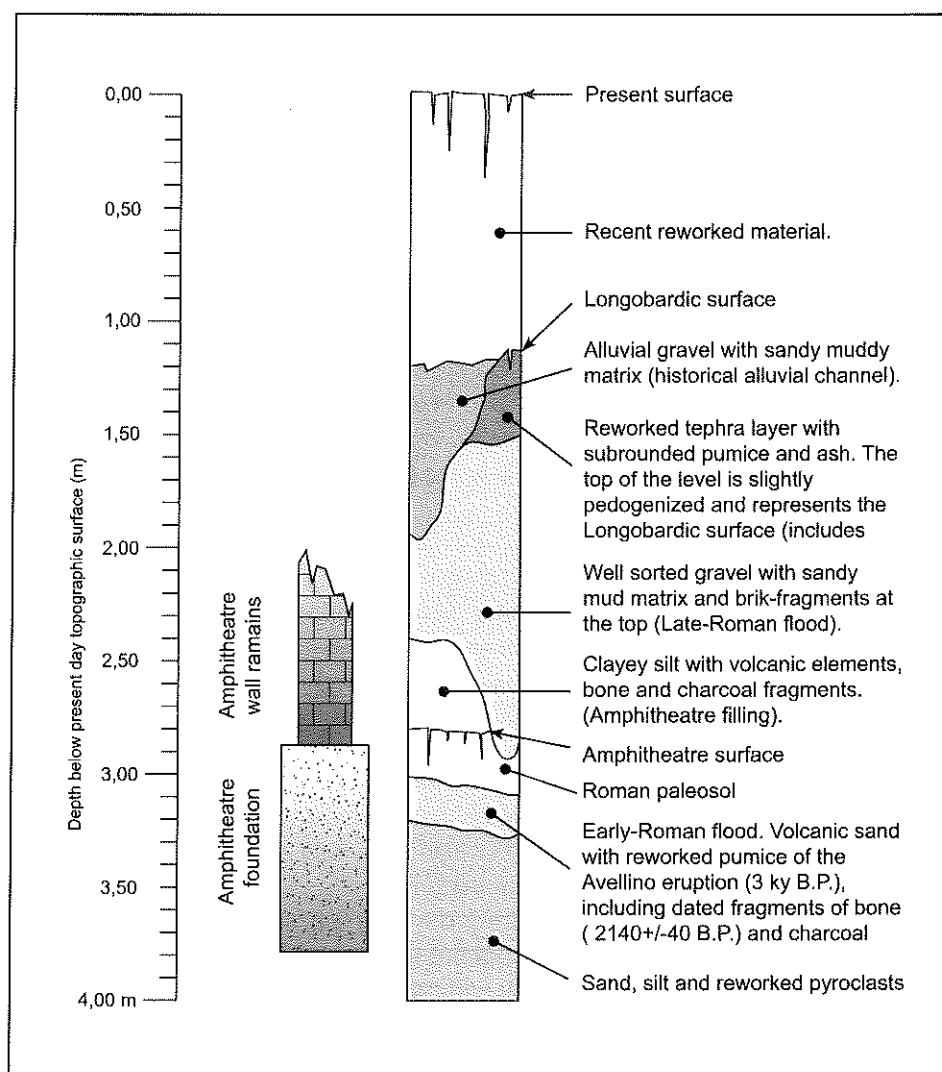


Figure 6. Roman amphitheatre stratigraphic section. The profile illustrates the relation among various identified levels. The amphitheatre remains, shown on the left, indicate the position of the foundations and of the walls remains below the present day topographic surface.

The two terraces are covered by a thick paleosol comprising reworked pyroclastic deposits attributed to the Pomici di Avellino eruption of Vesuvius volcano at 3ky B.P.

Study of the amphitheatre section reveals the occurrence of many geologic and human events. As shown in fig. 6, many stratigraphic levels separated by erosional or non-depositional surfaces are recognized.

The base of the amphitheatre section is represented by the above mentioned paleosol containing sand, silt and reworked pyroclasts (fig. 6). This paleosol is,

in turn, covered by alluvial deposits comprising sand with reworked pumice, bone and charcoal. This flood is dated on the basis of  $^{14}\text{C}$  analysis on bones and charcoal indicating an age of respectively 2144 yrs BP and 2240 yrs BP (ages calibrated with CALIB 4.3; Stuiver and Reimer, 1993). After the flood, a 20 cm-thick paleosol developed (fig. 6). The top of this paleosol corresponds to the Roman theatre surface. In turn, this surface is covered by up to 40 cm of clayey silt with volcanic fragments, bone and charcoal fragments; locally, it is eroded by alluvial deposits made of well-sorted gravel with a sandy silty matrix and brick fragments at the top (fig. 6). These alluvial deposits are covered by reworked tephra with sub-rounded pumice and ash, characterized by a non-depositional horizon at its top interpreted as the Longobardic surface (fig. 6). The Longobardic surface is then cut and eroded by a fluvial channel filled by gravel with a sandy silty matrix. Finally, the top of the amphitheatre section consists of recently reworked materials at the Present surface (fig. 6).

## 5. EVENT RESTORATION

The stratigraphic data presented here, in conjunction with the archaeological information, enable us to summarize the environmental history of the site where the town of Benevento was founded and developed (fig. 7). Diverse time scales, due to the different time spans recorded by the geological and archaeological stratigraphies, characterizes the succession of major events affecting this area. Four major phases may be recognized: (i) Pre-Quaternary geologic history, (ii) Late Pleistocene continental evolution of the town site, (iii) Late Pleistocene to modern fluvial development, and (iv) Events in Roman and Longobardic time.

### *Phase 1 - Pre-Quaternary geologic history*

The history Benevento region during the Late Tertiary was affected by the structural events associated with the Apenninic orogen. Bedrock underlying the Late Pleistocene deposits (a in fig. 7), widespread in the study area, are formed by Upper Cretaceous – Miocene strata deposited into slope-to-basin sedimentary environments, that were part of the southern margin of the Thehys oceanic domain. These strata were deformed from the Late Miocene to Early Pliocene, when the area was characterized by small and shallow intermontane basins which received terrigenous sediments. The Benevento Basin began to form from the Late Pliocene to Early Pleistocene time. Intense tectonic deformation decreased during the Middle Pliocene, when progressive emersion, recorded by deposition of a shallowing-up marine succession, evolved to the present geologic configuration.

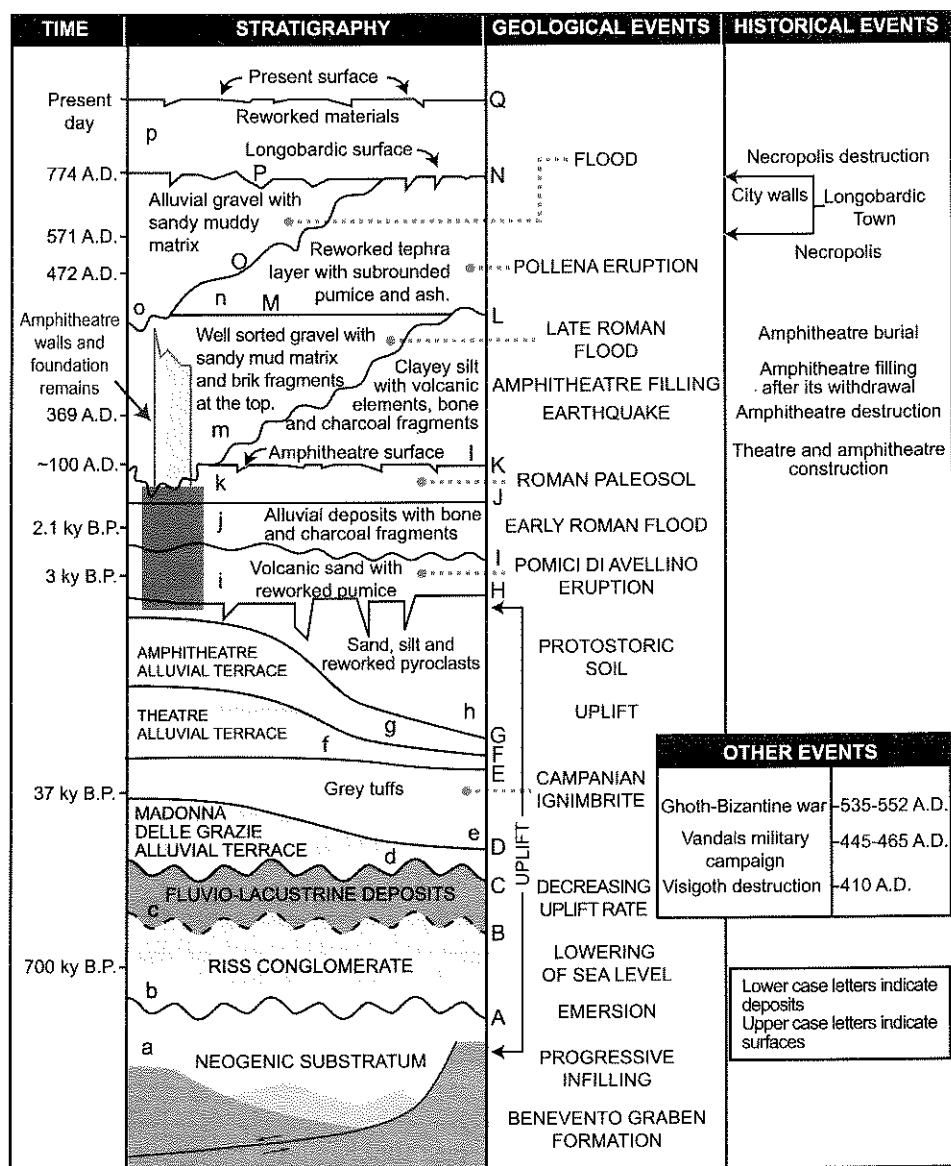


Figure 7. Synthesis of the succession of events that influenced the history of the site where Benevento was founded and developed. The small box on the left summarizes some historical events discussed in the text. A, B, C, D, ... indicate surfaces; a, b, c, d, ... indicate deposits from base to top of section.

### *Phase 2 - Late Pleistocene continental evolution (700-3 ky BP)*

The transition from regressive marine to the continental terrains of the Middle Pleistocene is denoted by a major stratigraphic gap (A in fig. 7). Conglomerates (b in fig. 7), deposited at about 700 ky BP (Riss glacial phase), accumulated unconformably above the older underlying terrains (Malatesta, 1958). The depositional environment (fluvial terraces, lacustrine Gilbert delta) in which these conglomerates were deposited is still under discussion. According to Pescatore *et al.* (1996), these coarse materials formed in a fluvial setting and were affected by minor tectonic events. Thickness and distribution of this unit (see stratigraphy) suggest that tectonic control was due to E-W trending normal faults and by N-S tectonic ridges, which induced over-flooding conditions.

An attenuation of depositional energy, probably related to decreased regional uplift, lead to the deposition of the three fluvio-lacustrine cycles (c in fig. 7) in the Benevento Basin. The age of these deposits, and the duration of the time gap with respect to the underlying conglomerates, remains undefined; however, the presence of coarse deposits at the base of the two lowest cycles (San Giorgio and Sabato) suggests that erosional events (B in fig. 7) prevailed at the beginning of each cycle.

### *Phase 3 - Late Pleistocene to modern fluvial development*

The deposition of the Madonna delle Grazie deposits initiated the Late Pleistocene fluvial sequence (d in fig. 7). Although we do not have precise information as to the beginning of this phase, the presence at the top of the terrace of grey tuff, can be correlated with the Campanian Ignimbrite deposits (e in fig. 7), dated at 37 ky BP (Barberi *et al.*, 1978; Civetta *et al.*, 1998).

Better constrained are the ages of the Theatre and Amphitheatre alluvial terraces (f and g in fig. 7) that formed during a time-span ranging from the time of deposition of the Campanian Ignimbrite and emplacement of the Pomici di Avellino (I in fig. 7). The Pomici di Avelino unit is attributed to a Vesuvius eruption at about 3 ky BP; this material has been found reworked in alluvial deposits (j in fig. 7) of an Early Roman flood, that also contain bones and charcoal.

A period of fluvial quiescence is suggested by a protohistoric soil (h in fig. 7), located between the Amphitheatre terrace and the above flood deposits. This soil horizon marks the end of phase 2.

### *Phase 4 - Events in Roman and Longobardic time*

Integrating geological interpretation with historical information serves to establish the sequence of events that affected Benevento during its more recent history. Some of the earthquakes and floods that marked this period were reported by ancient historians, and thus we have a fairly complete idea of natural events that affected this settlement. Moreover, study of geological data helps refine our knowledge of the sequence of events that modified Benevento during the past two millennia.

The above-cited flood deposit (j in fig. 7), of Early Roman age, covers the protostoric soil (h in fig. 7) that marks the end of step three. The age of this event is constrained by  $^{14}\text{C}$  ages of bones and charcoal recovered from the alluvial deposits. Bone age is 2144 y BP, charcoal age is 2240 y BP (ages calibrated with CALIB 4.3; Stuiver and Reimer, 1993): the flooding of Benevento occurred after its conquest by the Romans during the war against Pirrus (275 B.C.). This event was followed by a period of normal fluvial activity and development of the Roman city reached its maximum at the beginning of the III century A.D.

A 20 cm-thick paleosol (k in fig. 7) developed between the top of the flood deposits (J in fig. 7) and the amphitheatre surface (K in fig. 7). According to historical sources reporting the age of Theatre and Amphitheatre construction, this horizon is dated to the 1<sup>st</sup> century B.C. The amphitheatre surface locally represents a non-depositional surface lasted until 369 A.D., when a destructive earthquake, described by Simmaco Seniore, resulted in damage of the theatre and amphitheatre abandonment. Evidence of amphitheatre abandonment is the progressive sediment cover on the building remains (I in fig. 7) by a Late Roman paleosol (up to 40 cm-thick) that contains bone and charcoal fragments.

After 369 A.D. an other flood (m in fig. 7) buried the outer area of the city, resulting in the complete sediment cover of the amphitheatre. This event occurred at a time between the 369 A.D. earthquake and the 472 A.D. Mt. Vesuvius Pollena eruption (n in fig. 7), which covered the flood deposits. It is reasonable that the lack of restoration, abandonment of the two public edifices and burial of the amphitheatre may have been associated with deteriorating economic conditions of this area. In fact, the decline of the Roman town began at the end of the 3<sup>rd</sup> century A.D. and, during 5<sup>th</sup> century A.D., Benevento was subjected to repeated attacks and devastation by German invaders.

The upper level of the 472 A.D. eruption deposits (N in fig. 7) is highly weathered and is identified as the surface of Longobardic age. At the end of the 5<sup>th</sup> century A.D., a necropolis was created in the area previously occupied by the amphitheatre. Longobards arrived in Benevento in 571 A.D. and their domination lasted until 774 A.D., when they were defeated by Franks. Between the 6<sup>th</sup> and the 7<sup>th</sup> centuries A.D., walls were constructed around the Longobardic town to protect it against enemies and floods.

The walls were built along the edge of parts of the theatre terrace that thus become enclosed and protected in the town, while the amphitheatre and the necropolis remained outside the walls, and thus subject to river flooding and degradation. The amphitheatre section (fig. 6) shows the Longobardic surface partially covered and eroded by a fluvial channel (O in fig. 7) which resulted from a flood that covered the Amphitheatre terrace and destroyed the top of the necropolis.

## 6. REFERENCES

- Barberi, F., Innocenti, F., Lirer, L., Munno, R., Pescatore, T., Santacroce, R., (1978) *The Campanian Ignimbrite: a major prehistoric eruption in the Neapolitan area (Italy)*. Bull. Volcanol., **43**, 107-120.
- Civetta, L., Augusti, V., Del Gaudio, C., de Vita, S., Di Vito, M., Isaia, R., Marotta, E., Orsi, G., Pappalardo, L., Petrazzuoli, S., Piochi, M., Ricciardi, G., Ricco, C., Caradente, A., D'Antonio, M., Di Cesare, T., Necco, A., Fisher, R.V., Southon, J., Deino, A., Wohletz, K., (1998) *Campi Flegrei*. In: Orsi, G., Di Vito, M., Isaia, R. (Eds.). Volcanic Hazards and Risk in the Parthenopean Megacity. Field Excursion Volume, Cities on Volcanoes Int. Meet., Rome-Naples, Italy, pp. 26-71.
- Giampaola, D. (1990) – *Benevento: la formazione urbana e il processo di formazione del territorio*. In: "Basilicata. L'espansionismo romano nel sud-est d'Italia: Il Quadro archeologico", Venosa.
- Iannaccone, G., Improta, L., Biella, G., Castellano, M., Deshamps, A., De Franco, R., Malagnini, L., Mirabile, L., Romeo, R., Zollo, A. (1996) *A study of local site effects in the Benevento town (Southern Italy) by the analysis of seismic records of explosions*. Annali di Geofisica, **XXXVIII**, 3-4, 411-428.
- Marcellini, A., Iannaccone, G., Romeo, R., Silvestri, F., Bard, P. Y., Improta, L., Meneroud, J. P., Mouroux, P., Mancuso, C., Rippa, F., Soddu, T., Tento, A., Vinale, F. (1996) *Benevento seismic risk project: seismotectonic and geotechnical background*. Proc. Fifth Int. Conf. Seismic Zonation, Nice, October 17-19, **I**, 802-809.
- Malatesta, A. (1958) *Note di Geologia e Morfologia sulla valle Caudina e sulla valle del fiume Calore*. Boll. Serv. Geol. It., **80**, 255-260.
- Rotili, M. (1986) *Benevento Romana e Longobarda. L'immagine urbana*. Benevento.
- Neppi Modona, A. (1961) *Gli edifici teatrali greci e romani. Teatri, Odei, Anfiteatri, Circhi*. Leo S. Olschki editore, Firenze, 183-6-23.
- Pescatore, T. S., Improta, L., Romeo, R., Iannaccone, G. (1996) *Geologia della città di Benevento: caratteristiche litostratigrafiche finalizzate alla microzonazione sismica*. Boll. Soc. Geol. It., **115**, 307-324.
- Stuiver, M., and Reimer, P. J., (1986) *A computer program for radiocarbon age calibration*. Radiocarbon, **28**, 1022-1030.

**Aknowledgments:** This research is part of the project TRAIANO and was supported by GNDT (Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti) grant to Tullio Pescatore.

The authors wish to thank Prof. J. D. Stanley of the Smithsonian Institution for the careful revision of the manuscript.



## II METACAOLINO: eccellente “pozzolana” e materia prima per la produzione di nuovi materiali cementanti.

Nota del Socio Ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 1 Febbraio 2002)

**Riassunto** - Dopo un breve richiamo alla preparazione, costituzione e caratteristiche del metacaolino (una “pozzolana” ultrafine), se ne esaminano gli impieghi come prodotto supplementare per cementi compositi e come materiale di partenza per la produzione di nuovi cementanti ad alta resistenza, mediante attivazione alcalina.

Si passano dapprima in rassegna le principali fasi che prendono origine nel corso dell'idratazione e la loro successione, quando il metacaolino è posto a reagire con la calce o con il clinker di cemento. Si seguono: l'andamento della fissazione dell'idrossido di calcio per reazione “pozzolanica”, e lo sviluppo della resistenza meccanica, prospettando i principali vantaggi conseguibili mediante incorporazione di metacaolino nelle malte e calcestruzzi di cemento.

Si trattano successivamente i materiali che si neoformano per attivazione con soluzione di idrossidi alcalini (di sodio o di potassio), a bassa temperatura, sottolineando l'influenza delle caratteristiche di qualità del metacaolino di partenza e quella dei diversi parametri di sintesi, sulle proprietà e qualità dei prodotti di neoformazione.

Parole chiave; Metacaolino; Cementi compositi; Geopolimeri.

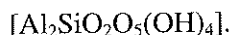
**Summary**. - Preparation, constitution and characteristics of metakaolin (a “pozzolana” ultra-fine) are briefly outlined, examining its use as supplementary cementing material and as starting product for preparing high-performance cementing materials, through alkaline activation.

Major phases originating in the hydration process and their sequence, when metakaolin reacts with lime or with cement clinker, are at first reviewed. The course of calcium hydroxide removal, owing to “pozzolanic” reaction, strength development and main advantages due to the incorporation of metakaolin into cement mortars and concretes, are discussed, too.

Successively, the cementing high-strength materials arising from metakaolin activation with alkaline solution (sodium or potassium), at low temperature, are considered, emphasizing the influence of the quality characteristics of the starting calcined alumino-silicate, together with that of the synthesis parameters, on the properties and characteristics of the end-products.

Key words: Metakaolin; Blended cements; Geopolymers.

Il metacaolino è essenzialmente un silico-alluminato anidro, preparato per appropriato trattamento termico di argille caoliniche, di argille, cioè, a base di caolinite, minerale descritto dalla formula:



Le argille caoliniche recano generalmente anche tracce di quarzo, feldspato indecomposto ed impurezze varie, che condizionano le caratteristiche di qualità del prodotto di calcinazione.

Gli ioni ossidrilici sono saldamente legati nella struttura a strati del fillosilicato, sicchè soltanto una temperatura sufficientemente alta può provocarne l'espulsione, a seguito di collasso dell'intera struttura.

La deidrossilazione induce una profonda ristrutturazione. Si neoforma un solido essenzialmente amorfo, costituito dal 50-55% di  $\text{SiO}_2$  e 40-45% di  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , non più reidratante.

Il disordine strutturale acquisito conferisce al solido un'alta reattività potenziale: l'attitudine, cioè, a reagire, ad esempio, con l'idrossido di calcio, in presenza d'acqua, per formare fasi precorritrici di presa ed indurimento (attività "pozzolanica"), favorita, quest'ultima, dalla composizione mineralogica, dalle dimensioni delle particelle e dalla superficie specifica. La progressione della reazione dipende dalle proprietà della "pozzolana" e dalle condizioni di stagionatura.

Il medesimo disordine strutturale rende il metacaolino atto anche a produrre nuovi materiali cementanti, dotati di alta resistenza meccanica e durabili, denominati polimeri inorganici (1), per semplice attivazione in mezzo alcalino (idrossido di sodio o di potassio).

Nella famiglia dei prodotti inorganici incorporabili nei cementi a parziale rimpiazzo del clinker (cementi compositi), le argille torrefatte sono entrate da gran tempo ("pozzolane artificiali") (2), anche se, attualmente, nei Paesi industrializzati, il loro impiego non è molto diffuso, per la disponibilità di notevoli quantità di sottoprodotti (ceneri volanti, scorie d'alto forno), parimenti dotati di reattività e più a buon mercato.

Al contrario, in Paesi in via di sviluppo, la fabbricazione di cemento Portland, vincolata all'alto consumo di energia, può favorire il ricorso ad argille e lateriti (3) quali prodotti di sostituzione parziale del semilavorato (il clinker di cemento), specie laddove se ne rinvenivano potenti giacimenti (zone tropicali e subtropicali).

Nella maggior parte dei minerali delle argille, la somma dei componenti principali ( $\text{SiO}_2 + \text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3$ ) supera l'80%; viene pertanto soddisfatto il disposto della Norma ASTM che stabilisce un valore superiore al 70 % di tali ossidi per le pozzolane che debbano esser impiegate come prodotti di sostituzione parziale del clinker.

L'utilizzazione di argille e lateriti in questa direzione prevede, però, un trattamento di appropriata torrefazione, al fine di migliorare le prestazioni dei manufatti (4), anche se l'attività "pozzolanica" non manca nei prodotti tal quale.

Recentemente vi è stato un risveglio di attenzione da parte degli studiosi (5) verso il metacaolino quale prodotto supplementare per la produzione di cementi compositi, in relazione alle sue caratteristiche intrinseche, del tutto competitive con quelle del fumo di silice condensato (6): alta superficie specifica (fra 15 e 20  $\text{m}^2/\text{g}$ ) (7), natura scarsamente cristallina.

Alla lista dei più nuovi prodotti supplementari per cementi e calcestruzzi ad alte prestazioni (8), si è infatti aggiunto il metacaolino ad alta reattività (HRM), ottenibile per calcinazione di argille caoliniche ad alta purezza. Si neoforma una "pozzolana" ultrafine, per alcuni aspetti, come già sottolineato, assolutamente competitiva con il fumo di silice condensato, particolarmente per l'ampia area superficiale. Inoltre, per il suo color bianco, non scurisce il relativo calcestruzzo e lo rende adatto ad assumere i colori scelti dall'architetto.

Sono pertanto state condotte recenti ricerche al fine di valutare gli effetti specifici del metacaolino in seno al cemento, studiando sia il sistema metacaolino-calce, (9), sia quello metacaolino-cemento (7). Sono state compiutamente rilevate le fasi cementanti che si neoformano ed è stato posto in luce che il meccanismo della reazione pozzolanica, controllato dalla diffusione, è strettamente legato alla matrice impiegata.

E' risultato che, a seguito della reazione del metacaolino con l'idrossido di calcio, le fasi cementanti che si neoformano a 20°C sono principalmente: il silicato di calcio idrato, gelatinoso (C-S-H), e la gehlenite idrata ( $C_2SH_8$ ). Insieme ad esse è stata pure segnalata la comparsa di alluminato tetracalcico idrato, caratterizzato da analogie strutturali con la gehlenite idrata (10), o di carboalluminato (5). A temperatura più alta (50°C), o in condizioni idrotermali, è stata rilevata anche la presenza di idrogranato (11),

A temperatura ambiente ed in sistemi più poveri di calce, è stato individuato anche l'alluminato tricalcico cubico (12).

E' pertanto verosimile ritenere (7) che le fasi idrate e la loro stabilità con la durata della stagionatura, siano strettamente dipendenti dal rapporto metacaolino/calce, dalla temperatura e dalla presenza di attivatori di varia natura, con evidenti ricadute sulle proprietà meccaniche e microstrutturali e, in definitiva, sul comportamento in opera dei manufatti.

Con riferimento alla temperatura, è stato osservato (13) che gehlenite idrata e alluminato tetracalcico idrato si rinvergono come fasi metastabili, suscettibili di conversione in idrogranato all'aumentare della temperatura e della durata della stagionatura. E' stato però recentemente osservato che l'idrogranato potrebbe anche risultare dalla reazione "pozzolanica" diretta fra metacaolino e calce e non necessariamente neoformarsi attraverso una reazione di conversione (7). Ciò in considerazione del fatto che, in determinate condizioni ed a 60°C, gehlenite idrata ed alluminato tetracalcico idrato, rilevati da 2 ore a 9 giorni, risultano metastabili, nonostante la presenza d'idrogranato da 30 ore a 9 giorni (6).

Lo sviluppo di fasi idrate dipende inoltre dalla natura dell'attivatore impiegato. In una pasta metacaolino/calce, il C-S-H è risultato il principale prodotto d'idratazione in presenza di tutti gli attivatori presi in considerazione (13), mentre la natura delle fasi secondarie è apparsa significativamente influenzata dalla chimica del sistema.

In un sistema privo di attivatori secondari, alla temperatura di 40°C e dopo 180 giorni di stagionatura, si sono formati: alluminato tricalcico idrato, gehlenite idrata ed alluminato tetracalcico idrato. Alluminato tricalcico idrato e, in trac-

ce, anche quello tetracalcico, si sono formati in presenza di solfato. In presenza di NaOH come attivatore, il metacaolino ha preferito la gehlenite idrata, con tracce di alluminato tetracalcico idrato.

Per quanto attiene alla successione delle fasi, in un sistema metacaolino/calce (1:1 in peso), alla temperatura di 20°C, il C-S-H è stato rilevato dopo soli due giorni d'idratazione, seguito da gehlenite idrata ben cristallizzata ed alluminato tetracalcico idrato, a basso grado di cristallinità, entrambi manifestatisi in pari tempo.

Le reazioni chimiche che decorrono quando il metacaolino interagisce con il clinker di cemento, sono invece generalmente più complesse di quelle che hanno luogo fra metacaolino e calce (7), verosimilmente perché il clinker è costituito da una serie di fasi che reagiscono con velocità differente. Ciò, in unione con la presenza di altre specie chimiche: solfati, alcali, cloruri e costituenti minori, che possono determinare variazioni nella solubilità dei costituenti principali (silice, allumina, calce), potrebbe condizionare la velocità della reazione "pozzolanica", con ricadute sullo sviluppo e grado di cristallinità delle fasi idrate.

La successione delle fasi idrate si è infatti rilevata differente da quella più sopra riportata per il sistema metacaolino/calce, per tenori di metacaolino del 25% (7), per durate di stagionatura fino ad un anno e alla temperatura di 20°C.

Gehlenite idrata sostanzialmente amorfa è stata individuata fra 3 e 7 giorni di stagionatura, in dipendenza del contenuto di metacaolino. L'alluminato tricalcico idrato sembra formarsi non prima di 180 giorni di stagionatura e solo per alti contenuti di metacaolino (25%). Al di sotto del 20%, tale fase infatti non è stata identificata (7).

Molteplici risultano gli effetti prodotti dal metacaolino, allorché utilizzato per la preparazione di cementi compositi.

Un primo risultato è rappresentato dal miglioramento della durabilità delle relative malte e calcestruzzi, sistematicamente operato, in varia misura, dal rimpiazzo parziale del clinker con minerali finemente suddivisi e ad alta attività "pozzolanica".

E' noto che la scarsa durabilità dei manufatti è, in parte, addebitabile alla solubilità in acqua dell'idrossido di calcio (portlandite 1.76 g/l a 10°C), che si neoforma a seguito dell'idratazione dei silicati tricalcico e bicalcico di costituzione del clinker, ed è chimicamente reattivo, in particolare in ambienti acidi.

La sua parziale o totale rimozione, a seguito della "pozzolanicità" del metacaolino e la sua sostituzione con C-S-H addizionale, contribuisce al bloccaggio dei pori della pasta di cemento, con evidenti ricadute sulla permeabilità del sistema e sul comportamento alla penetrazione di ioni aggressivi. L'incorporazione di metacaolino nella pasta di cemento produce anche un affinamento della struttura dei pori. Il loro volume decresce con l'aumento della durata di stagionatura e, generalmente, anche con aumento del materiale di rimpiazzo (metacaolino). Si registra altresì un aumento di resistenza meccanica a tutte le stagionature.

E' stato posto in luce (14) che la rimozione di portlandite per reazione "pozzolanica" raggiunge un massimo a circa 14 giorni, in corrispondenza di un massimo di resistenza meccanica. Fra 14 e 28 giorni è stato invece riscontrato un ritardo della reazione "pozzolanica" ed un declino della resistenza corrispondente, attribuibile alla formazione di uno strato di prodotti di reazione, che esercita un'azione inibitrice sulle particelle di metacaolino.

Il rimpiazzo parziale di clinker di cemento con prodotti ad attività "pozzolanica", - a parte la normale riduzione di resistenza meccanica iniziale per effetto della loro azione diluente, in parte compensata dall'accelerazione dell'idratazione della frazione clinker, a seguito della rapida rimozione dell'idrossido di calcio e, a brevi stagionature, dall'esotermicità della reazione "pozzolanica" - determina numerosi vantaggi.

Fra questi, la riduzione: dei costi, dello sviluppo di calore, della distribuzione delle dimensioni dei pori della pasta di cemento, del loro pH con 10 -20% di metacaolino, ciò che è ritenuto rilevante per minimizzare il pericolo della reazione alcali - aggregato), della permeabilità, del trasporto d'acqua, della penetrazione dei cloruri, la quale cresce al crescere del contenuto di metacaolino ed al decrescere del rapporto acqua/cemento (15). La resistenza chimica denuncia un incremento.

La presenza di prodotti supplementari finemente suddivisi aumenta di norma la richiesta d'acqua d'impasto. I problemi connessi alla lavorabilità sono però superabili con l'aggiunta di appropriati superfluidificanti.

Non mancano neppure effetti fisici, poiché i prodotti finemente suddivisi si comportano anche da filler (16), determinando, nelle zone interfacciali pasta-aggregato, una migliore saldatura, favorendo la formazione di una più omogenea e più compatta microstruttura e riducendo la zona di transizione.

La presenza di prodotti ultrafini, che si traduce in una riduzione della resistenza su pasta, per effetto della già ricordata azione diluente, determina, invece, un incremento della resistenza meccanica su calcestruzzo, per effetto della creazione di una migliorata zona di transizione pasta-aggregato.

Nei calcestruzzi si riduce inoltre il pericolo di "smiscelamento", che produce separazione d'acqua sulla superficie (essudazione o bleeding) e sedimentazione degli elementi lapidei sul fondo.

Tre fattori principali influenzano pertanto il contributo dato dal metacaolino alla resistenza meccanica del calcestruzzo preparato con un cemento che lo incorpora.. Un effetto filler, la rimozione dell'idrossido di calcio a seguito di reazione "pozzolanica", l'accelerazione dell'idratazione della frazione clinker.

L'effetto filler si manifesta immediatamente; l'accelerazione dell'idratazione è massima entro le prime 24 ore (16); la rimozione della portlandite è massima fra 7 e 14 giorni, in corrispondenza di un massimo di resistenza meccanica.

Il più alto valore di resistenza meccanica a lungo termine sembra assicurato da circa il 20% di metacaolino.

L'aumento di resistenza meccanica del calcestruzzo accusa però una pausa trascorsi circa 14 giorni, indipendentemente dal livello di rimpiazzo di prodotto supplementare, in corrispondenza di un aumento del contenuto di portlandite (non ancora consumata), che si accompagna ad un aumento del volume dei pori della pasta di cemento.

L'incorporazione di metacaolino (20%) nella matrice cementizia, impartisce inoltre una buona resistenza al gelo (17), attraverso una limitazione della migrazione d'acqua, conseguente all'avvenuto affinamento dei pori della pasta di cemento. La distribuzione dimensionale dei pori del gel e di quelli capillari giuoca infatti un ruolo fondamentale nel determinare la resistenza al gelo, così come la distribuzione delle dimensioni dei pori, piuttosto che la porosità totale, promuove la durabilità.

Convieni inoltre sottolineare che l'incorporazione di metacaolino nel cemento e nel calcestruzzo, a livello di rimpiazzo almeno del 15%, induce anche buona resistenza all'attacco solfatico (18), benchè la differenza sostanziale fra metacaolino e classiche pozzolane risieda, più che altro, nel tenore di allumina, ben più elevato nel primo.

L'affinamento della struttura dei pori, conseguito grazie alla presenza di metacaolino, ostacola il trasporto di agenti aggressivi, così come la riduzione del tenore di calce d'idrolisi limita la formazione di solfoalluminato di calcio idrato trisolfatico e di gesso, due principali responsabili di espansione e disgregazione della matrice cementizia.

Il comportamento alla prova di scagliatura, che definisce la risposta del manufatto all'azione dei sali disgelanti, ha infine uguagliato quello rilevato quando, come prodotto supplementare, si impiega fumo di silice condensato.

Il medesimo metacaolino, se attivato con una soluzione concentrata di alcali, è atto a generare, a bassa temperatura ( $< 100^{\circ}\text{C}$ ), nuovi materiali cementanti, simili a quelli ceramici sintetici, che induriscono rapidamente sotto i  $100^{\circ}\text{C}$ , ed esibiscono alta resistenza meccanica. Si neoformano silico-alluminati complessi, con caratteristiche e proprietà influenzate da quelle del prodotto di partenza, così come dai parametri di sintesi.

E' stato riscontrato (19) che, in presenza di idrossido di calcio, i prodotti che si originano per attivazione alcalina del metacaolino, variano in funzione della concentrazione dell'idrossido alcalino (di sodio o potassio), impiegato quale attivatore della miscela solida.

Miscele metacaolino/idrossido di calcio in proporzione 1:1, attivate con soluzioni d'idrossido di sodio di differente concentrazione, a  $45^{\circ}\text{C}$  e per 24 ore, hanno infatti consentito di porre in luce che se la concentrazione della soluzione d'idrossido di calcio è pari a 5 M o più bassa, il principale prodotto di neoformazione risulta l'idrossido di calcio, ancorchè l'attivazione del metacaolino non risulti ancora completa.

Al contrario, se l'attivazione si effettua con soluzione d'idrossido di sodio di concentrazione 10M o più alta, il principale prodotto di reazione risulta un silico-alluminato alcalino, a carattere polimerico, simile a quello ottenuto, in as-



senza d'idrossido di calcio, a seguito di attivazione con lo stesso attivatore alcalino. Come prodotto secondario della reazione si neoforma gelo di CSH (20-30%).

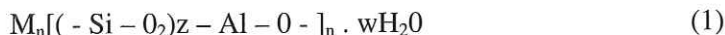
Risulta pertanto che esiste una soglia di concentrazione di ioni  $\text{OH}^-$ , al di sopra della quale si forma il polimero alcalino e, al di sotto, il gelo di CSH.

E' verosimile pertanto ritenere che un'alta concentrazione di ioni  $\text{OH}^-$  ostacoli la dissoluzione dell'idrossido di calcio.

Risultando bassa la concentrazione di ioni calcio, il silicato disciolto evolve verso un silico-alluminato sodico. Con l'abbassarsi della concentrazione degli ioni  $\text{OH}^-$ , aumenta la concentrazione di ioni calcio in soluzione ed il principale prodotto della reazione diventa il gelo di CSH.

L'attivazione del metacaolino in mezzo alcalino (idrossidi di sodio o di potassio) è stata descritta in termini di reazione polimerica (1) (policondensazione).

I polimeri inorganici che si sviluppano hanno formula generale:



dove - è il legame; z variabile da 1, 2 o 3 ed n il grado di polimerizzazione.

La sintesi di questi materiali cementanti presenta analogie con quella delle zeoliti (20).

La struttura reticolare consta di tetraedri  $\text{SiO}_4$  ed  $\text{AlO}_4$ , collegati alternativamente mediante condivisione degli atomi di ossigeno, allocati dove si trovano i cationi alcalini, ceduti dalla soluzione attivante, a bilancio delle cariche negative dell'alluminio tetracoordinato.

La struttura può pertanto esser riferita a quella di alcune zeoliti (20).

La differenza sostanziale fra zeoliti e prodotti cementanti, ottenuti per attivazione alcalina del metacaolino, risiede nell'ordine strutturale. Mentre le zeoliti sono specie cristalline perfette, il polimero inorganico è invece amorfo ed è da considerarsi il precursore delle specie zeolitiche cristalline (21). Parecchie analogie sussistono, però, nella sintesi di entrambi i prodotti. Ad esempio, l'attivazione della reazione necessita di ioni  $\text{OH}^-$  (22).

Nella sintesi delle zeoliti, al fine di favorire la cristallizzazione, si impiega un eccesso di liquido ed il prodotto di neoformazione può esser separato per filtrazione. Nei polimeri inorganici ottenibili per attivazione alcalina del metacaolino, è preferibile impiegare un minimo di soluzione attivante, compatibile con l'ottenimento di una pasta con buona lavorabilità.

Con riferimento ai complessi meccanismi del processo di attivazione alcalina, è stata ipotizzata una successione di tre stadi: il primo, rappresentato dalla dissoluzione delle specie solubili nella fase alcalina, il secondo, dalla riorganizzazione e diffusione degli ioni in soluzione, con successiva formazione di piccole strutture coagulate, il terzo, dalla crescita e condensazione di tali strutture per formare i prodotti idrati.

E' stata altresì studiata l'influenza di fattori, quali: temperatura, durata della stagionatura, e sono state proposte alcune composizioni limite per l'ottenimento di cementi alcalini ottimali, ad alta resistenza meccanica, indicando l'intervallo entro cui tali composizioni possono esser variate (23).

E' stato osservato che l'attivazione del metacaolino in condizioni idrotermali (85°C per 2 ore) (23), produce materiali cementanti ad alta resistenza. Le corrispondenti proprietà meccaniche risultano influenzate, in maniera determinante, dalla concentrazione della soluzione attivante, dal volume di liquido attivatore, dalle caratteristiche del metacaolino di partenza.

Metacaolini ad alta superficie specifica richiedono per l'impasto alti rapporti liquido/ solido, il che favorisce la porosità ed abbassa la resistenza meccanica.

La concentrazione della soluzione attivante, idonea a registrare l'optimum di resistenza meccanica, dipende dalla reattività del metacaolino. Per quelli a più alta superficie specifica (più reattivi), possono esser impiegate soluzioni più diluite. L'impiego di minor quantità di liquido attivante che, in determinate condizioni di stagionatura, favorisca una reattività elevata, permette anche di raggiungere una più alta resistenza meccanica ed una riduzione della porosità.

Il prodotto denuncia buona stabilità per immersione in agenti aggressivi di vario tipo (21) e si rivela pertanto durabile. La durata di permanenza nella soluzione aggressiva sembra promuovere la trasformazione del silicoalluminato amorfo in un prodotto a struttura cristallina. Trascorso un determinato tempo d'immersione, è stata infatti riscontrata una modesta quantità di cristalli a struttura della faujasite (21), ciò che si accorda con un progressivo sviluppo di resistenza meccanica.

Trasformazione del gelo precursore in un prodotto cristallino, progressione nel tempo della stessa e ricadute sulle proprietà di comportamento tecnico necessitano, però, di ulteriore approfondimento..

### Bibliografia

- (1) Davidovits J. Synthetic mineral polymer compound of the silicoaluminates family and preparation process. U.S. Patent, No 4,172,199 (1984).
- (2) Sersale R. Structure et caractérisation des pouzzolanes et des cendres volantes. 7<sup>e</sup> Congrès Int. Chimie Ciments. I. Rapports Principaux, IV-1/3, IV-1/2, Paris (1980).
- (3) Pera J., Ambroise J., Messi A. Pozzolanic activity of calcined laterite. *Silicates Ind.*, 63, 7-8, 107-111 (1998).
- (4) Amicarelli V., Sersale R., Sabatelli V. Attività "pozzolanica" dei prodotti piroclastici argillificati. *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat.*, Napoli, 4, 33, 257-278 (1966).
- (5) Murat M. Hydration reaction and hardening of calcined clays and related minerals. I. Preliminary investigations of metakaolin. *Cement Concrete Res.*, 13, 2, 259-266 (1983).



- (6) Cabrera J., Frias Rojas M. Mechanism of hydration of metakaolin-lime-water system. *Cement Concrete Res.*, 31, 2, 177-182 (2001).
- (7) Frias M., Cabrera J. Influence of MK on the reaction kinetics in MK/lime and MK-blended cement system at 20 °C. *Cement Concrete Res.*, 31, 4, 519-527 (2001).
- (8) Curcio F. De Angelis B.A., Pagliolico S. Metakaolin as a pozzolanic microfiller for high-performance mortars. *Cement Concrete Res.*, 28, 6, 803-809 (1998).
- (9) De Silva P.S., Glasser F.P. Phase relations in the system  $\text{CaO-Al}_2\text{O}_3\text{-SiO}_2\text{-H}_2\text{O}$  relevant to metakaolin-calcium hydroxide hydration. *Cement Concrete Res.*, 23, 3, 627-639 (1993).
- (10) Sersale R., Giordano Orsini P., Aiello R. Analogie strutturali fra alluminato tetra-calcico idrato e gehlenite idrata. *Rend. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. Fis. Mat. Nat.*, VIII, XXXIV, 274-282 (1963).
- (11) Turriziani R. Contributo alla conoscenza di un idrogranato presente nei prodotti di reazione del caolino disidratato con l'idrato di calcio alla temperatura di 50°C. *Ric. Sci.* 24, 2645-2648 (1954).
- (12) Serry M.A., Taha A.S., El-Hemaly S.A.S., El-Didamony H. MK/lime hydration products. *Thermochim. Acta*, 79, 103-110 (1984).
- (13) De Silva P.S., Glasser F.P., Hydration of cements based on metakaolin: Thermochemistry. *Adv. Cement Res.*, 4, 16, 167-178 (1992).
- (14) Wild S., Khatib J.M. Portlandite consumption in metakaolin cement pastes and mortars. *Cement Concrete Res.*, 27, 1, 137-146 (1997).
- (15) Boddy A., Hooton R.D., Gruber K.A. Long-term testing on the chloride-penetration resistance of concrete containing high-reactivity metakaolin. *Cement Concrete Res.*, 31, 5, 759-765 (2001).
- (16) Wild S., Khatib J.M., Jones A. Relative strength, pozzolanic activity and cement hydration in superplasticised metakaolin concrete. *Cement Concrete Res.*, 26, 10, 1537-1544 (1996).
- (17) Chabannet M., Girodet C., Bosc J.L., Pera J. Effetti del metacaolino sulla resistenza ai cicli di gelo disgelo delle malte. *Ind. Ital. Cemento*, 71, 3, 240-249 (2001).
- (18) Khatib J.M., Wild S. Sulphate resistance of metakaolin mortar. *Cement Concrete Res.*, 28, 1, 83-92 (1998).
- (19) Santiago A., Palomo A. Calorimetric study of alkaline activation of calcium hydroxide-metakaolin solid mixtures. *Cement Concrete Res.*, 31, 1, 25-30 (2001).
- (20) Davidovits J. Geopolymers of the first generation: Siliface Process. *Proc. First Europ. Conf. Soft Mineralogy (Geopolymer '88)*. France, 1, 49-67 (1988).
- (21) Palomo A., Blanco-Varela M.T., Granizo M.L., Puertas F., Vazquez T., Grutzeck M.W. Chemical stability of cementitious materials based on metakaolin. *Cement Concrete Res.*, 29, 7, 997-1004 (1999).
- (22) Scherillo A., Sersale R. Dalle lave alle piroclastiti, alla zeolitizzazione. *Boll. Ass. Ital. Zeoliti*, 1, 12-17. De Frede (Napoli). (1993).

- (23) Granizo M.L., Blanco-Varela M.T., Puertas F., Palomo A. Alkaline activation of metakaolin: influence of synthesis parameters. Proc. 10 th Int. Congr. Chem. Cement , 3,3ii 113. Gothenburg (1997).

## Introduzione alla matematica costruttiva

Nota di P. De Martino e A. Drago<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Paolo De Lucia  
(Adunanza del 1 marzo 2002)

*Key words:* analisi discreta, computabilità

**Abstract** – It comes completely exposed great part of the work of O. Aberth relative to the analysis, in which us account of how much of the analysis becomes is obtainable with calculation algorithms and how much instead contains an essential process of idealization, not supported from real calculations. Seen comprehensively, the constructive mathematics is not other than the synthetic formalization of the numerical analysis, that is of all the constructive techniques of calculation.

To give, in synthesis, an idea of the results obtained from this constructive mathematics and of its limits will be presented a summarizing table

**Riassunto** - Viene esposto gran parte del lavoro di O. Aberth relativo all'analisi, in cui ci si rende conto di quanto dell'analisi è ottenibile con algoritmi di calcolo e quanto invece contiene un essenziale processo di idealizzazione, non sostenuto da calcoli effettivi.

Vista complessivamente, la matematica costruttiva non è altro che la formalizzazione sintetica dell'analisi numerica, cioè di tutte le tecniche di calcolo costruttive.

Per dare, in sintesi, un'idea dei risultati ottenuti da questa matematica costruttiva e dei suoi limiti si presenterà una tabella riassuntiva.

### 1 - CENNI STORICI.

Nella prima decade di questo secolo sono nate nuove maniere di fondare la matematica. Esse hanno sostenuto la necessità di liberare la matematica dai concetti che sarebbero responsabili della famosa "crisi dei paradossi".

In opposizione alla matematica classica, che utilizza l'infinito in atto (ad es. nell'assioma di Zermelo) ci si restringe al solo infinito potenziale, cioè essenzialmente il principio di induzione completa, in altri termini, l'esistenza di un ente matematico significa la sua computabilità effettiva. In questo modo tutta la matematica resta molto più limitata di quella classica (ad es. l'insieme dei numeri reali risulta solo numerabile e non della potenza del continuo). La limitazione suddetta può essere introdotta in diverse maniere alle quali corrispondono diverse scuole di matematici: intuizionisti, costruttivisti, ricorsivisti ecc. Comunque esse risultano tutte sostanzialmente equivalenti.

In generale, tutte impongono che un ente matematico può essere definito solo quando esiste un algoritmo finitista che permetta di costruirlo. Questa richiesta elimina tutti i numeri reali per i quali non si conosce un algoritmo per costruirli, però introduce nuovi numeri ai quali non si è abituati nell'impostazione classica: ad es. il numero  $a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  dove  $a_n$  è uguale a 0 se  $2n$  è esprimibile come somma di due numeri primi; è uguale a 1 se  $2n$  non è esprimibile come somma di due numeri primi. Che un numero pari sia esprimibile come somma di due primi (congettura di Goldbach) vale per tutti i numeri sperimentati mediante un calcolatore, però non esiste un teorema che ci assicuri la validità di tale proprietà per tutti i numeri interi. Di conseguenza non si conoscono tutte le cifre decimali del numero  $a$  e quindi non è nota la sua precisa collocazione sulla retta dei numeri reali. Questi numeri sono stati chiamati "sfuggenti" e la loro presenza nelle matematiche di tipo costruttivo non permette di decidere in generale se per due generici numeri reali  $x$  ed  $y$ ,  $x=0$  esattamente, se una funzione  $f(x)$  è dotata di massimo o di minimo, o se  $x \geq y$ .

Ciò è proprio quello che avviene nelle misure in fisica e nelle approssimazioni. Questo caso è indicativo di che cosa ci fa scoprire la matematica computabile: dato che abbiamo imparato l'analisi nella sua versione

<sup>1</sup> Gruppo di Storia della Fisica, Dipartimento di Scienze Fisiche, Università degli studi di Napoli "Federico II".

idealizzata da precisioni assolute, dal trascurare i calcoli e dall'assioma di Zermelo, ritroveremo quelle limitazioni che erano ben chiare a tutti i matematici che si restringevano ai calcoli effettivi.

In questo senso la matematica computabile ci rende coscienti di quanto dell'analisi è ottenibile con algoritmi di calcolo e quanto invece contiene un essenziale processo di idealizzazione, non sostenuto da calcoli effettivi.

Per la stesura della maggior parte del lavoro si è fatto riferimento al libro di O. Aberth, mentre per la dimostrazione dei teoremi VI.1 e VI.2 si è consultato un suo articolo e per la parte riguardante il teorema di Specker (Teorema III.4) un articolo di Douglas S. Bridges.

## 2 - PROGRAMMI E COMPUTABILITA'

La matematica computabile di Aberth è una particolare matematica costruttiva. Essa ha il vantaggio di essere molto intuitiva per chi è abituato ad usare un calcolatore. Infatti, in questo caso, essere costruibile significa essere eseguibile da un calcolatore con un opportuno programma di calcolo. Un programma  $P$  consiste di un numero finito di variabili (celle di memoria)  $v_1, \dots, v_n$  e un numero finito di passi di calcolo  $s_1, \dots, s_k$ .

Le variabili  $v_i$  assumono sempre valori razionali, i quali sono fissati all'inizio, ma possono essere cambiati durante l'esecuzione dei passi di calcolo  $s_j$ . Un passo di calcolo può essere di quattro tipi:

Compiere un'operazione aritmetica tra due numeri posti in  $v_i$  e  $x_0$ , porre il risultato in  $v_j$ ; passare a  $s_{j+m}$ .

Porre un numero nella cella  $v_i$ ; passare poi al passo  $s_{j+m}$ .

Se la variabile  $v_i > 0$  esegui il passo  $s_{j+m}$ ; se la variabile  $v_i \leq 0$  esegui il passo  $s_{j+p}$ .

Fermata.

Ad ogni programma  $P$  è associato un numero intero  $N_P$  detto numero descrittivo del programma.

Teorema della fermata: Per ogni intero descrittivo  $N_P$  di un programma  $P$  non c'è metodo effettivo per determinare se  $P(N_P)$  è definito o no (cioè, se  $P$  ferma).

Dim.

Il teorema afferma che non è possibile stabilire se un programma  $P$  è definito dall'esame di un qualunque suo intero descrittivo  $N_P$ .

Per stabilire la proposizione del teorema ragioneremo per assurdo.

Supponiamo che si possa dare per ogni intero descrittivo  $N_P$  di un programma  $P$  una funzione programmabile  $F(n)$  in guisa tale che per  $n = N_P$   $F(n) = 1$  se  $P(N_P)$  è definito, e  $F(n) = 2$  se  $P(N_P)$  non è definito.

Sia costruito allora un programma  $Q$  tale che  $Q(n) = Q(N_P)$  ferma se  $F(n) = 2$ ; mentre, se  $F(n) = 1$ ,  $Q(n)$  incontra un ciclo; ad esempio il seguente:  $Q(n)$  calcola  $2 - F(n)$  e lo mette in  $v_3$ ; col passo 3 se  $2 - F(n) \leq 0$ , decide che ritorna a calcolare  $2 - F(n)$  e così via; se invece  $2 - F(n) > 0$ , allora ferma.

Poiché per ipotesi (assurda) la  $F$  è programmabile non c'è difficoltà nella costruzione del programma  $Q$ .

Orbene applichiamo la funzione  $F$  al programma  $Q$ . Dei due casi supponiamo che sia  $F(N_Q) = 2$  e cioè, per definizione di  $F$ , che  $Q$  non ferma; ma invece sappiamo che se  $F = 2$ ,  $Q(N_Q)$  ferma. Quindi non è possibile  $F = 2$ . D'altra parte se  $F(N_Q) = 1$ , cioè decide che  $Q$  ferma invece con ingresso 1  $Q$  non ferma, in quanto incontra il ciclo suddetto. Quindi in entrambi i casi abbiamo un assurdo. Allora la  $F$  non è applicabile a  $N_Q$  e quindi l'ipotesi che per ogni intero descrittivo di un programma esista una tale funzione programmabile  $F$  è falsa.

L'assurdo a cui siamo giunti prova l'asserto.

**Teorema II-1:** Esiste un programma  $U$  tale che per ogni programma  $P$  con numero descrittivo  $N_p$ , il programma  $U$  applicato al numero  $N_p$ , e al numero  $a$ , che è indicato con  $U(N_p, a)$ , è definito se e solo se  $P(a)$  è definito, e inoltre  $U(N_p, a) = P(a)$ .

Il programma  $U$  è detto programma universale.

Dim.

Il programma  $U$  si compone di due parti ben definite e finite: la prima scompone  $N_p$  ed identifica i passi  $s_j$  di  $P$ , mettendoli in memoria. Poi applica i passi  $s_j$  su  $a$ . Quindi il programma si compone di due parti, ognuna con una funzione molto chiara: decodifica e calcolo. Il risultato non può che essere  $P(a)$ .

**Teorema II-2:** Esiste un programma  $\hat{U}$  tale che  $\hat{U}(n, a, m)$  è definito come segue per  $a$  razionale e  $n, m$  interi non negativi. Se  $n = N_p$  e  $P(a)$  è definito dopo l'esecuzione di non più di  $m$  passi, allora  $\hat{U}(n, a, m) = 1$ . In tutti gli altri casi  $\hat{U}(n, a, m) = 0$ .

Dim.

È una semplice estensione del teorema precedente.

### 3 - NUMERI REALI, FUNZIONI E SEQUENZE.

Diamo ora la definizione di numero computabile. Una funzione  $\alpha$  di variabile razionale  $\varepsilon$ , a valori razionali, è detta processo computabile se è programmabile e soddisfa la relazione

$$|\alpha(\varepsilon_1) - \alpha(\varepsilon_2)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

il cui significato intuitivo è evidente, quando si considerino  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  come le approssimazioni del calcolo di  $\alpha$ .

Diremo processo nullo un processo computabile  $\alpha$  tale che  $|\alpha(\varepsilon)| \leq \varepsilon$ .

Due processi computabili  $\alpha$  e  $\beta$  si dicono equivalenti se  $\alpha - \beta$  è un processo computabile nullo. Si può dimostrare che tale relazione, indicata col simbolo  $\equiv$ , gode delle proprietà: riflessiva, simmetrica, transitiva; quindi è una relazione di equivalenza nell'insieme dei processi computabili.

Allora possiamo definire numero computabile come la classe di equivalenza dei processi computabili equivalenti ad un dato processo computabile  $\alpha$ . (Con ciò si sottolinea il fatto che ad esempio  $\pi$  può essere calcolato in molti modi equivalenti aree dei poligoni inscritti ad un cerchio, di quelli circoscritti, statistica delle posizioni di un ago che cade su una linea, ecc.).

Come per i numeri computabili, anche per le funzioni e per le sequenze le definizioni sono date con l'ausilio di funzioni programmabili  $\alpha(\varepsilon)$ .

Sia  $F = F(n, \varepsilon)$  una funzione programmabile dell'intero positivo  $n$  e del razionale costruttivo  $\varepsilon$  tale che:

Se  $\alpha$  è un processo computabile e il numero  $\{\alpha\}$  appartiene a un certo intervallo  $I$  e  $N_\alpha$  è il numero descrittivo del programma che realizza  $\alpha$ , allora anche  $F(N_\alpha, \varepsilon)$  è un processo computabile con approssimazione  $\varepsilon$ .

Se  $\alpha \equiv \beta$  allora  $F(N_\alpha, \varepsilon) \equiv F(N_\beta, \varepsilon)$ . In tal caso  $F$  definisce una funzione  $f(x)$  che mappa i numeri  $x = \alpha$  dell'intervallo  $I$  nei numeri  $f(x) = \{F(N_\alpha, \varepsilon)\}$ .

Sia  $\alpha_n(\varepsilon)$  una funzione programmabile dell'intero  $n$  e del razionale  $\varepsilon > 0$  tale che fissando  $n = \bar{n}$  allora  $\alpha_{\bar{n}}(\varepsilon)$  è un processo computabile. Diremo che  $\alpha_n(\varepsilon)$  definisce una sequenza  $a_n = \{\alpha_n\}$ .

Una sequenza  $a_n$ , converge al limite  $l$  e scriveremo  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  se esiste una funzione  $f$  (da notare che qui si richiede la  $f$  computabile e non si usa l' $\exists!$ ) dei numeri positivi  $e$ , tale che  $|a_n - l| < e$  per  $n \geq f(e)$ .

Una sequenza  $a_n$ , soddisfa la condizione di Cauchy se esiste una funzione  $f$  dei numeri positivi  $e$ , tale che  $|a_n - a_m| \leq e$  per  $n, m \geq f(e)$ .

Teorema III-1: Una sequenza  $a_n$ , converge a un limite se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu : n, m > \nu \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Dim.

Si ripete quella classica. Ovvero supponiamo  $\{a_n\}$  convergente: sia  $l$  il suo limite. Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $\nu$  tale che

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{se } n > \nu$$

Quindi se  $n, m > \nu$  risulta

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

quindi risulta verificata la condizione di Cauchy.

Viceversa, supponiamo che  $\{a_n\}$  verifica la condizione di Cauchy. Allora in primo luogo  $\{a_n\}$  è limitata. Infatti, fissato  $\bar{n} > \nu$ , per ogni  $m > \nu$  si ha

$$a_{\bar{n}} - \varepsilon < a_m < a_{\bar{n}} + \varepsilon.$$

Posto  $h = \min\{a_1, \dots, a_{\bar{n}}, a_{\bar{n}} - \varepsilon\}$ ,  $k = \max\{a_1, \dots, a_{\bar{n}}, a_{\bar{n}} + \varepsilon\}$

si ha ovviamente

$$h \leq a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

cioè la limitatezza di  $\{a_n\}$ . Denotiamo con  $l', l'' \in \mathbb{R}$  rispettivamente il minimo limite ed il massimo limite di  $\{a_n\}$ . Esiste una sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}$  convergente a  $l'$  ed una sottosuccessione  $\{a_{m_k}\}$  convergente a  $l''$ .

Scelto  $\varepsilon > 0$ , per la condizione di Cauchy esiste un indice  $\nu$  tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{se } n, m > \nu.$$

Sia  $\bar{k}$  tale che per  $k > \bar{k}$  riesca  $n_k > \nu$ ,  $m_k > \nu$ ; risulta allora

$$|a_{n_k} - a_{m_k}| < \varepsilon \quad \text{se } k > \bar{k}.$$

Quindi

$$|l' - l''| = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{n_k} - a_{m_k}| \leq \varepsilon$$

essendo  $\varepsilon$  arbitrario deve essere  $l' = l''$ , per cui  $\{a_n\}$  risulta essere convergente.

Per i limiti di sequenze convergenti valgono i seguenti risultati:

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$a \leq a_n \leq b \Rightarrow a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq b$$

Molto utile è il seguente teorema, caratteristico dell'analisi di Aberth:

Teorema III-2: Sia  $a_n$  una sequenza convergente al limite  $l$ . Se  $R(x)$  è una proposizione riguardante il numero  $x$  e se  $R(l)$  è vera mentre  $R(a_n)$  non lo è, allora non c'è metodo effettivo per determinare se  $R(x)$  è vera o no per un  $x$  generico.

Ad esempio per ogni  $b$  fissato non c'è metodo effettivo per determinare se è vera o no la seguente proposizione: " $x=b$ ".

Infatti se  $a_n = b + \frac{1}{n}$  e se  $R(x)$  è la frase " $x=b$ ", sono verificate le condizioni e la tesi del teorema.

Inoltre non esiste metodo effettivo per determinare se un numero  $x$  è razionale o no. Infatti se  $a_n = 2 + \frac{\sqrt{2}}{n}$  e  $R(x)$  è la frase " $x$  è razionale", sono verificate ancora le condizioni e la tesi del teorema. Infine non esiste metodo effettivo per determinare se la cifra  $n$ -esima di un numero reale  $x$  è 0; infatti se  $a_n = 1 - 10^{-n}$  e  $R(x)$  è la frase "la cifra  $n$ -esima di  $x$  è 0" sono verificate le condizioni e la tesi del teorema.

Avendo stabilito che l'uguaglianza (esatta!) tra due numeri non è decidibile, si tratta ora di vedere se possiamo stabilire almeno delle affermazioni più deboli dell'uguaglianza.

Si può dimostrare il seguente teorema.

**Teorema III-3:** Sia  $\alpha$  un numero. Delle tre possibilità:  $\{\alpha\} < 0$ ,  $\{\alpha\} = 0$ ,  $\{\alpha\} > 0$ , non è possibile che nessuna di esse sia vera, né è possibile che due siano vere.

Valgono inoltre le seguenti proposizioni sul concetto di disuguaglianza  $\neq$  tra due numeri (che sono chiare intuitivamente se si concepiscono i numeri come intervalli di approssimazione crescente):

Se  $x \neq a$  allora c'è un metodo effettivo per determinare se  $x < 0$  ( $x > 0$ ) o no.

Se  $a_1 \neq a_2$ , allora per ogni processo computabile  $\alpha$  c'è un metodo effettivo di determinare l'intero  $i=1$  o 2, tale che  $a_i \neq \{\alpha\}$ .

Se  $a_1 < \dots < a_n$ ,  $n > 2$ , allora per ogni processo computabile  $\alpha$  che definisce un numero  $\alpha$  nell'intervallo  $(a_1, a_n)$ , c'è un metodo effettivo di trovare un intero  $i$ ,  $1 \leq i \leq n-2$ , tale che  $a_i < \{\alpha\} < a_{i+2}$ .

Se  $a_n$  è una sequenza convergente e  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < b$  c'è un metodo effettivo di trovare un intero positivo  $n$  tale che  $a_n < b$ .

Tutto questo, anche se più debole, è come in matematica classica.

Però esiste un teorema importante che differisce dalla matematica classica:

**Teorema III-4 (Specker 1949):** Si può costruire una sequenza limitata e monotona crescente  $a_n$ , che non converge ad un limite.

Dim.

Per la dimostrazione si costruisce una sequenza complicata  $a_n = \sum_{m=1}^n s_n(m) 3^{-m}$  monotona crescente e

limitata. Supponendo poi per assurdo che una tale sequenza converga ad un limite  $\{\beta\}$ , numero irrazionale con infinite cifre e senza nessuna periodicità perché ogni cifra riguarda la determinazione di un programma differente, per il Teorema III-2 (applicato al caso per cui non è possibile determinare la cifra decimale  $n$ -esima per un numero reale generico), possiamo determinare la cifra  $r$ -esima della espansione decimale di  $\beta^{10-(r-1)}$ ; se essa eguaglia 9, per definizione di  $\beta$ , cioè di  $a_n$ , sapremo che, essendo  $r = N_p$ ,  $P(N_p)$  è definito.

Perciò dalla espansione decimale di  $\beta$  si potrà costruire un metodo effettivo per determinare tutti i casi in cui  $P(N_p)$  è definito, ma ciò è assurdo per il teorema della fermata.

Una sequenza strettamente crescente  $(r_n)$  di numeri reali con la proprietà descritta nella conclusione del teorema di Specker, viene detta una sequenza di Specker. Tali sequenze sono la base di molti difficili "controesempi ricorsivi" ai teoremi classici.

I concetti di sequenze convergenti e sequenze di Cauchy possono essere generalizzati e applicati alle sequenze di funzioni.

Una sequenza di funzioni  $f_n(x)$  converge a un limite  $f(x)$  su un intervallo  $I$ , cioè  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  per  $x \in I$  se  $f_n(x)$  e  $f(x)$  sono definite su  $I$  ed esiste una funzione  $g(e, x)$ , definita per  $e$  positivo e per  $x \in I$ , tale che per  $x_0 \in I$ ,  $n \geq g(e, x_0) \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq e$ .

Se  $g(e, x)$  può essere sostituita da una funzione  $g(e)$ , allora la convergenza è detta uniforme.

Una sequenza di funzioni  $f_n(x)$  è una sequenza di Cauchy di funzioni su un intervallo  $I$  se  $f_n(x)$  è definita su  $I$  ed esiste una funzione  $g(e, x)$ , definita per  $e$  positivo e per  $x \in I$ , tale che per  $x_0 \in I$ ,  $n, m \geq g(e, x_0) \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq e$ .

Se  $g(e, x)$  può essere sostituita da una funzione  $g(e)$ , allora la sequenza  $f_n(x)$  è detta uniformemente di Cauchy.

**Teorema III-5:** Una sequenza di funzioni  $f_n(x)$  converge su un intervallo  $I$  se e solo se è una sequenza di Cauchy di funzioni su  $I$ . Inoltre essa converge uniformemente su  $I$  se e solo se è una sequenza uniformemente di Cauchy su  $I$ .

*Dim.* Si ripete quella classica.

**Corollario:** Sia  $a_n$  una sequenza di numeri positivi tali che la sequenza  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$  converge.

Se  $h_n(x)$  è una sequenza di funzioni tali che  $|h_n(x)| \leq a_n$  per  $x$  in un intervallo, allora la sequenza di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n h_k(x)$$

converge uniformemente in  $I$ .

#### 4 - FUNZIONI CONTINUE.

Introduciamo il concetto di distanza. Si dice distanza una funzione  $d$  del numero positivo  $e$  ed eventualmente di altre variabili  $x, y, \dots$  tale che  $d(e)$ , oppure  $d(e, x, y, \dots)$ , sia sempre positiva.

Una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  è continua nel punto  $x_0$  se c'è una funzione distanza  $d(e)$  tale che:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq e \quad \text{per} \quad |x - x_0| \leq d(e) \quad \text{e} \quad x \in I.$$

Una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  è puntualmente continua in  $I$  se esiste una funzione distanza  $d(e, x)$  con  $x \in I$  tale che:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq e \quad \text{per} \quad |x - x_0| \leq d(e, x_0) \quad \text{e} \quad \forall x_0 \in I$$

Una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  è discontinua nel punto  $x_0$  di  $I$  se c'è una sequenza  $x_n$  di punti di  $I$  che ammette  $x_0$  come limite e tale che  $|f(x_n) - f(x_0)| > e_1$  per qualche  $e_1$  e per ogni  $x_n$ .

**Teorema IV-1:** Se  $f(x)$  è definita nell'intervallo  $I$ , essa non può essere discontinua in ogni punto del suo insieme di definizione.

Per la dimostrazione si utilizza un teorema complesso non menzionato; la tesi è comunque intuibile quando si pensino i numeri come intervalli.

Si possono invece considerare funzioni che siano discontinue su punti isolati. Su tali punti le funzioni non possono essere definite.

Quindi la funzione ad. Es. di Dirichlet (una cui forma semplice è  $\lim_m \lim_n \cos^{2n}(m!kx)$ ) non è costruttiva e così quasi tutte le funzioni patologiche classiche.

Una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  è uniformemente continua in  $I$  se c'è una funzione distanza  $d(e)$  tale che:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq e \quad \text{per} \quad |x_1 - x_2| \leq d(e) \quad \text{e} \quad x_1, x_2 \in I$$

Evidentemente una funzione uniformemente continua in  $I$  è puntualmente continua in  $I$ . In matematica computabile non sempre però è vero il viceversa. Infatti:

**Teorema IV-2:** Esiste una funzione definita in  $[0,1]$  ed ivi puntualmente continua che però non è uniformemente continua né limitata.

*Dim.*

Per la dimostrazione si utilizza il Teorema di Specker (III-4)

Per esempio, la Figura 1 illustra la costruzione di una funzione  $f$  da  $[0,1]$  in  $[0,1]$  con le seguenti proprietà:



$f$  è puntualmente continua: cioè, per ogni  $x$  in  $[0,1]$  e ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che se  $y \in [0,1]$  e  $|x - y| < \delta$ , allora  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

$f$  non è uniformemente continua: più precisamente, esistono sequenze  $(x_n), (y_n)$  di numeri reali compresi tra 0 e 1 tali che per ogni  $n$ ,  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ,  $f(x_n) = 0$  e  $f(y_n) = 1$ .

Quindi essa assomiglia alla funzione del Dirichelet attorno al punto 1.

L'esistenza di una tale funzione contrasta nettamente con la situazione classica, in cui ogni funzione puntualmente continua da  $[0,1]$  in  $\mathbb{R}$  è uniformemente continua (in altre parole, nella (i) si può trovare una costante  $\delta$  dipendente solo da  $\varepsilon$ , e non dalla  $x$ ).

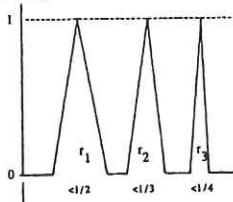


Figura 1.

Gráfico di una funzione puntualmente continua da  $[0,1]$  in  $[0,1]$  che non è uniformemente continua.

**Teorema IV-3:** Se  $f(x)$  è definita in  $[a,b]$  e  $f(a) \neq f(b)$  e  $c$  è un numero compreso tra  $f(a)$  e  $f(b)$ , allora non è possibile che  $f(x) = c$  per tutti gli  $x$  in  $(a,b)$ .

Dim.

E' intuibile pensando i numeri come intervalli.

**Teorema IV-4:** Per funzioni  $f(x)$  definite nell'intervallo  $[a,b]$  tali che  $f(a) \neq f(b)$  e con  $c$  compreso tra  $f(a)$  e  $f(b)$ , non c'è metodo effettivo per determinare un punto  $x_0$  in  $[a,b]$  tale che  $f(x_0) = c$ . Anche per funzioni uniformemente continue non c'è un tale metodo effettivo.

Per convincersi dell'ultima affermazione basta considerare  $f(x) = kx$  con  $k$  sfuggente.

**Teorema IV-5:** Per ogni funzione  $f(x)$ , ed ogni quattro numeri  $a, b, c, \varepsilon$ , tali che  $f(x)$  è definita in  $[a,b]$ , con  $f(a) \neq f(b)$ ,  $c$  compreso tra  $f(a)$  e  $f(b)$  ed  $\varepsilon > 0$ , allora c'è un metodo effettivo di trovare un punto in  $(a,b)$  tale che  $|f(x_0) - c| < \varepsilon$ .

Dim.

E' intuitiva sulla base dell'idea di approssimabilità di un numero

**Corollario:** Per funzioni strettamente monotone su  $[a,b]$  con  $f(a) \neq f(b)$  e con  $c$  compreso tra  $f(a)$  e  $f(b)$  c'è un metodo effettivo di trovare un punto  $x_0$  in  $(a,b)$  tale che  $f(x_0) = c$ .

Una sequenza di funzioni  $f_n(x)$  è uniformemente continua su un intervallo  $I$  se  $f_n(x)$  è definita su  $I$  per ogni  $n$  ed esiste una sequenza di funzioni distanza  $d_n(\varepsilon)$  tale che

$$x_1, x_2 \in I \text{ e } |x_1 - x_2| \leq d_n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \varepsilon.$$

**Teorema IV-6:** Se la sequenza di funzioni  $f_n(x)$  è uniformemente continua su un intervallo  $I$  e converge uniformemente in  $I$  al limite  $f(x)$ , allora  $f(x)$  è uniformemente continua su  $I$ .

Dim.

Si ripete quella classica.

Corollario: Sia  $a_n$  una sequenza di numeri positivi tali che la sequenza  $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$  converge. Se  $h_n(x)$  è una sequenza uniformemente continua di funzioni tali che  $|h_n(x)| \leq a_n$  per  $x$  in un intervallo  $I$ , allora la sequenza di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n h_k(x)$$

converge uniformemente su  $I$  ad una funzione  $f(x)$  uniformemente continua.

Sia  $f(x)$  una funzione definita in  $I$ . Si dice minimo di  $f(x)$  in  $I$  un numero  $m$  tale che  $m$  è un limite inferiore per  $f(x)$  in  $I$  ( $m \leq f(x), \forall x \in I$ ) mentre se  $m'$  è un altro limite inferiore per  $f(x)$  in  $I$ ,  $m' \leq m$ .

Si dice invece massimo di  $f(x)$  in  $I$  un numero  $M$  tale che  $M$  è un limite superiore per  $f(x)$  in  $I$  ( $M \geq f(x), \forall x \in I$ ) mentre se  $M'$  è un altro limite superiore per  $f(x)$  in  $I$ ,  $M' \geq M$ .

Teorema IV-7: Per ogni funzione uniformemente continua  $f(x)$  in un intervallo chiuso  $[a, b]$  c'è il massimo e il minimo di  $f(x)$  in tale intervallo.

Però in matematica computabile vale un altro importante teorema limitativo, dovuto sempre alla sola approssimabilità dei numeri.

Teorema IV-8: Esiste una funzione  $f(x)$ , definita e uniformemente continua in  $[0, 1]$  che non assume il suo massimo  $M$ , cioè non c'è un numero  $x \in [0, 1]$  con  $f(x) = M$ .

Dim.

La dimostrazione è una chiara conseguenza del teorema di Specker (III-4).

## 5 - DERIVATE.

Sia  $f(x)$  una funzione definita in un intervallo aperto  $I$  contenente il punto  $x_0$ . Si definisce derivata di  $f(x)$  nel punto  $x_0$  quel numero  $f'(x_0)$  tale che esiste una funzione distanza  $d(e)$  per cui:

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - f'(x_0) \right| \leq e \text{ per } x_1 \neq x_2; |x_1 - x_2| \leq d(e); |x_1 - x_0| \leq d(e)$$

e  $f(x)$  definita in  $x_1, x_2$ . Una funzione  $f(x)$  ha una funzione  $f'(x)$  come derivata in  $(a, b)$  se c'è una funzione distanza  $d(e, x)$  tale che tutte e tre le funzioni sono definite in  $(a, b)$  e per ogni  $x_0 \in (a, b)$  si abbia:

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} - f'(x_0) \right| \leq e \text{ per } x_1 \neq x_2; |x_1 - x_2| \leq d(e, x_0); |x_1 - x_0| \leq d(e, x_0).$$

Non vale il teorema del valore medio classico perché richiede un punto esatto, ma vale una sua espressione debole.

Teorema del valore medio: Se  $f(x)$  è definita in  $[a, b]$  ed ha una derivata  $f'(x)$  in  $(a, b)$  che soddisfa le disuguaglianze  $m \leq f'(x) \leq M$ , con  $m$  ed  $M$  costanti, allora

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Ma la determinazione del preciso punto estremante è chiaramente indecidibile.

Teorema V-1: Per funzioni  $f(x)$  definite in un intervallo chiuso  $[a, b]$  con  $f(a) = f(b)$  e con derivata  $f'(x)$  definita in  $(a, b)$  non c'è metodo effettivo di trovare un punto  $x_0$  in  $(a, b)$  con  $f'(x_0) = 0$ . Anche per funzioni uniformemente continue con funzioni derivate uniformemente continue non c'è tale metodo effettivo.

Comunque un tale  $x_0$  può essere determinato effettivamente per quelle funzioni di cui si conosce la verità o la falsità della proposizione "Esiste un intervallo  $[c,d]$ , con  $a \leq c < d \leq b$  su cui  $f'(x) = 0$  identicamente".

Dim.

Segue direttamente dal Teorema IV-4.

Valgono invece i teoremi seguenti più deboli:

**Teorema V-2:** Se  $f(x)$  è definita in  $[a,b]$  con derivata  $f'(x)$  in  $(a,b)$ , allora se  $f(a)=f(b)$  non è possibile che  $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ .

**Teorema V-3:** Per ogni funzione  $f(x)$ , con derivata  $f'(x)$ , ed ogni tre numeri  $a,b,c$  tali che  $f(x)$  è definita in  $(a,b)$  con  $f(a)=f(b)$ ,  $f'(x)$  è definita in  $(a,b)$  e  $c$  è un numero positivo, c'è un metodo effettivo di determinare un punto  $x_0$  in  $[a,b]$  tale che  $|f'(x_0)| \leq c$ .

Dim.

Segue direttamente dalla definizione di numero reale come processo di approssimazione.

**Corollario:** Sotto le condizioni del teorema, ma senza la richiesta che  $f(a)=f(b)$ , c'è un metodo effettivo di trovare un punto  $x_0$  tale che:

$$\left| \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x_0) \right| < c$$

Con rettangolo aperto  $R$  si intende un insieme di punti  $(x,y)$  con  $x$  e  $y$  contenuti in intervalli aperti. Per ogni coppia di punti  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  si pone:

$$|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Diremo che la funzione  $f(x,y)$  ha un numero  $f_x(x_0, y_0)$  come derivata parziale rispetto a  $x$  in un punto  $(x_0, y_0)$  se  $f(x,y)$  è definita in un rettangolo aperto  $R$  contenente  $(x_0, y_0)$  ed esiste una funzione distanza  $d(e)$  tale che

$$\left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)}{x_1 - x_2} - f_x(x_0, y_0) \right| \leq e$$

per  $x_1 \neq x_2$ ;  $|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)| \leq d(e)$ ;  $|(x_2, y_1) - (x_0, y_0)| \leq d(e)$  ed  $f(x,y)$  definita in  $(x_1, y_1), (x_2, y_1)$ .

Analoghe considerazioni si fanno per la derivata parziale rispetto a  $y$ .

Diremo poi che  $f(x,y)$  ha una funzione  $f_x(x, y)$  come derivata parziale rispetto a  $x$  in tutto il rettangolo aperto  $R$  se c'è una funzione distanza  $d(e, x, y)$  tale che tutte e tre le funzioni sono definite per  $(x,y)$  in  $R$  e in ogni punto  $(x_0, y_0)$  di  $R$  si abbia

$$\left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)}{x_1 - x_2} - f_x(x_0, y_0) \right| \leq e \text{ per } x_1 \neq x_2;$$

$$|(x_1, y_1) - (x_0, y_0)| \leq d(e, x_0, y_0); |(x_2, y_1) - (x_0, y_0)| \leq d(e, x_0, y_0).$$

Se in un punto  $(x_0, y_0)$  esistono entrambe le derivate parziali di  $f(x,y)$ , allora  $f(x,y)$  ha un differenziale in quel punto.

**Teorema V-4:** Se  $f(x,y)$  ha entrambe le derivate prime parziali nel rettangolo aperto  $R$  e  $f_{yx}(x_0, y_0)$  esiste nel punto  $(x_0, y_0)$  di  $R$ , allora esiste anche  $f_{xy}(x_0, y_0)$  e si ha:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

## 6 - INTEGRAZIONE.

Si dice partizione di un intervallo  $[a, b]$  una coppia  $x_i$ ,  $N$  dove  $N$  è un intero positivo e  $x_i$  è una sequenza definita per  $0 \leq i \leq N$ , tale che  $x_0 = a, x_N = b$  e la disuguaglianza  $x_{i-1} \leq x_i$  vale per  $1 \leq i \leq N$ . La norma della partizione è:

$$\|x_i\| = \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1})$$

Si dice griglia per un intervallo  $[a, b]$  una coppia di sequenze  $x_i, y_i$  e un numero intero positivo  $N$  tale che  $x_N = b$  e per  $1 \leq i \leq N$  e  $x_0 = a$  valgono le disuguaglianze  $x_{i-1} \leq x_i$ ;  $x_{i-1} \leq y_i \leq x_i$ . La norma della griglia è:

$$\|x_i\| = \max_{1 \leq i \leq N} (x_i - x_{i-1})$$

Una funzione  $f(x)$  si dice integrabile su  $[a, b]$  se è definita in  $[a, b]$  ed esistono un numero, indicato con  $\int_a^b f(t)dt$ , e una funzione distanza  $d(e)$  tale che per ogni griglia  $x_i, y_i, N$  per  $[a, b]$  avente norma minore o uguale a  $d(e)$  si abbia:

$$\left| \sum_{i=1}^N f(y_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq e$$

**Teorema VI-1:** Supponiamo che  $f(x)$  sia definita su  $[a, b]$ . Allora  $f(x)$  è integrabile su questo intervallo se e solo se esiste una funzione distanza  $d(e)$  tale che per ogni partizione  $x_i, N$  di  $[a, b]$

$$\|x_i\| \leq d(e) \Rightarrow \sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})|(x_i - x_{i-1}) \leq e$$

**Teorema VI-2:** Se  $f(x)$  è uniformemente continua in  $[a, b]$  allora  $f(x)$  è integrabile su  $[a, b]$ .

**Teorema VI-3:** Una funzione a variazione limitata su  $[a, b]$  è integrabile su tale intervallo.

I teoremi VI-2 e VI-3 possono essere considerati come corollari al teorema VI-1.

Vale il classico teorema:

**Teorema VI-4:** Se  $f(x)$  è uniformemente continua in  $[a, b]$ , la funzione  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  con  $x \in [a, b]$ ,

posto  $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$  per definizione, ha una derivata in  $(a, b)$  che uguaglia  $f(x)$ .

**Teorema VI-5:** Esiste una funzione puntualmente continua in  $[0, 1]$  che non è ivi integrabile.

Dim.

Al solito si sfrutta il teorema di Specker.

**Teorema VI-6:** Se  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  sono integrabili su  $[a, b]$ , lo sono anche le funzioni  $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$  per ogni  $k_1, k_2$ , la funzione  $f_1(x)f_2(x)$  e la funzione  $|f_1(x)|$ . Se inoltre esiste un numero positivo  $e_1$  tale che la disuguaglianza  $|f_2(x)| \geq e_1$  vale per ogni  $x \in [a, b]$ , allora  $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$  è integrabile su  $[a, b]$ .

Consideriamo ora brevemente, riferendoci all'esposizione precedente, le principali differenze tra analisi computabile e analisi classica:

## 7- TABELLA RIASSUNTIVA

| ANALISI CLASSICA (VALE)                                                                                                               | ANALISI COMPUTABILE                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Teorema di Cauchy per le successioni (Teorema III-1)                                                                                  | VALE                                                                      |
| Principio di onniscienza ("Se $n_k$ è una sequenza di interi si hanno solo due casi: $\exists n_k = 0$ oppure $\forall n_k \neq 0$ ") | NON VALE ALTRIMENTI SI ANDREBBE CONTRO IL TEOREMA DELLA FERMATA           |
| Legge di tricotomia                                                                                                                   | NON VALE PER LA PRESENZA DEI NUMERI SFUGGENTI                             |
| "Ogni successione limitata e monotona crescente converge ad un limite" (Teorema III-4)                                                | NON VALE                                                                  |
| "Esistenza di funzioni totalmente discontinue nel loro insieme di definizione" (Ad es. la funzione di Dirichlet)                      | NON VALE, VEDI TEOREMA IV-1                                               |
| Teorema di Weierstrass                                                                                                                | NON VALE ECCETTO PER LE FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE VEDI TEOREMA IV-7 |
| Teorema di Bolzano                                                                                                                    | NON VALE VEDI TEOREMA IV-3                                                |
| Teorema del valor medio                                                                                                               | VALE UNA SUA ESPRESSIONE DEBOLE                                           |
| Teorema di Rolle                                                                                                                      | NON VALE, MA E' APPROSSIMABILE VEDI TEOREMA V-2                           |
| Teorema: "Se $f(x)$ è puntualmente continua in $[a, b]$ , allora $f(x)$ è integrabile su tale intervallo"                             | NON VALE, ECCETTO PER FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE                     |

Equazioni differenziali del primo ordine  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Vediamo infine l'argomento che è cruciale per le applicazioni fisiche (meccanica in particolare).

Il nostro problema è analogo all'usuale "problema di esistenza" delle equazioni differenziali trattate in matematica classica.

Teorema VI-1: Data l'equazione differenziale  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  con  $f(x, y)$  continua uniformemente in un rettangolo  $R = \{(x, y): x \in [a, b], y \in [c, d]\}$  con  $|f(x, y)| \leq M$ , e lipschitziana, cioè  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L(y_1 - y_2)$ , con  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$  punti di  $R$  e  $M$  ed  $L$  costanti positive; allora per ogni costante assegnata  $y_0$  con  $(a, y_0), (b, y_0 \pm M(b-a))$  in  $R$  c'è un metodo effettivo per trovare una funzione uniformemente continua  $y(x)$  in  $[a, b]$  e la sua derivata  $y'(x)$  tale che  $y(a) = y_0$ ,  $y'(x) = f(x, y)$ . Inoltre la funzione è unica.

Dim.

L'usuale tecnica di Cauchy-Lipschitz dimostra il teorema, e cioè dà il metodo effettivo e l'unicità di  $y(x)$ .

Si noti che la uniforme continuità richiesta per  $f(x, y)$  non può essere sostituita con la continuità puntuale: in matematica classica questa su un intervallo chiuso dà sempre la continuità uniforme, ma in matematica costruttiva no.

Comunque per alcuni  $y_0$  non c'è metodo effettivo di trovare una funzione  $y(x)$  che soddisfi le relazioni  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(a) = y_0$  se la funzione  $f(x, y)$  non è lipschitziana.

**Teorema VI-2:** Siano le stesse ipotesi del teorema precedente, eccetto la condizione di Lipschitz  $|f(x, y)| \leq M$ . Allora per ogni intero positivo  $n$  esiste un metodo effettivo di trovare la funzione approssimante  $y_n(x)$  con  $x \in [a, b]$  tale che  $y_n(a) = y_0$ ,  $|y'_n(x) - f(x, y_n(x))| \leq \frac{1}{n}$  e la sua derivata  $y'_n(x)$ . Tuttavia, c'è una  $f(x, y)$  tale che per un appropriato  $y_0$  non c'è metodo effettivo di trovare una funzione  $y(x)$  soddisfacente alle condizioni  $y'(x) = f(x, y(x))$ ,  $y(a) = y_0$ .

**Dim.**

Per la prima parte del teorema basta ricordare che in matematica costruttiva tutto è approssimabile.

Infatti non c'è difficoltà nel costruire una funzione uniformemente continua  $f_n(x, y)$  tale che  $|f_n(x, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{n}$  in  $R$  e che soddisfi in più la condizione di Lipschitz specifica per quella  $f_n$   $L = L_n$ . Allora dal teorema precedente possiamo trovare  $y_n(x)$  con  $|y'_n(x) - f(x, y_n(x))| = |f_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| \leq \frac{1}{n}$ .

Per dimostrare la seconda parte del teorema consideriamo l'equazione differenziale  $f(x, y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}} = \frac{dy}{dx}$  con  $[a, b] = [0, 1]$ .

Integrando membro a membro otteniamo  $\int \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx$  e cioè  $y^{\frac{2}{3}} = x + \text{cost}$ . Per  $x = 0$  otteniamo  $y^{\frac{2}{3}}(0) = \text{cost} = y_0^{\frac{2}{3}}$ . Allora se  $y_0 > 0$ ,  $y = \left(x + |y_0|^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$  cosicché  $y(1) > 1$ . Invece se  $y_0 < 0$ ,  $y = -\left(x + |y_0|^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$  cosicché  $y(1) < -1$ . (Che queste funzioni siano uniche può essere dimostrato applicando il teorema precedente per un appropriato rettangolo  $R$ .)

Se poi  $y_0 = 0$ , ognuna delle seguenti funzioni risulta essere soluzione:  $y = 0$  per  $x \in [0, x_0]$ ,  $y = \pm(x - x_0)^{\frac{3}{2}}$  per  $x \in [x_0, 1]$ , con  $0 \leq x_0 \leq 1$ .

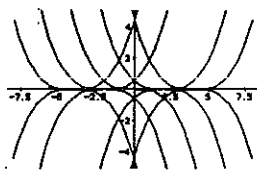


Figura 2

Alcune soluzioni di  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} y^{\frac{1}{3}}$

Se ci fosse un metodo effettivo per ottenere la soluzione  $y(x, y_0)$  per ogni  $y_0$  in un intervallo contenente 0 come punto interno, cioè ad esempio  $[-1, 1]$  allora arriveremmo ad una contraddizione. Definiamo la funzione programmabile  $Q(n)$  come segue:

Per  $n = N_p$ , poniamo  $y_0 = a_p$  e decidiamo se è vero  $y(1, a_p) > -\frac{1}{2}$  o  $y(1, a_p) < -\frac{1}{2}$ . Nel primo caso  $Q(n) = +1$ , nel secondo  $Q(n) = -1$ . Così se  $P(N_p)$  è definita,  $Q(N_p) = +1$  se  $P(N_p) \leq 0$  e  $-1$  se  $P(N_p) > 0$ . Ma allora se  $N_Q$  è l'intero descrittivo del programma realizzante  $Q$ , qualsiasi valore assume  $Q(N_Q)$  porta ad una contraddizione.

Notiamo che la matematica costruttiva ottiene allora tutti risultati importanti per le applicazioni della fisica; però restano esclusi alcuni casi (funzioni non lipschitziane e non uniformemente continue). Il che non comporta che in questi casi particolari le soluzioni non siano ottenibili con ipotesi aggiuntive, giustificate dal fatto che si tratta di casi eccezionali; ad es. in meccanica funzioni non lipschitziane sono le funzioni forza di un campo centrale; nel caso di un campo dato da un corpo puntiforme, la forza in quel punto è infinita (divergenze classiche). Inoltre funzioni forza non uniformemente continue si hanno ad esempio in corpi che scorrono su un tavolo andando oltre il bordo, dove istantaneamente si aggiunge la forza peso. Anzi, si può anche sostenere che è bene che la matematica, come nel caso della matematica costruttiva, segnali casi di questo tipo, perché certamente sono casi limite dello schema concettuale e teorico generale. Per cui quello che può apparire come una menomazione della matematica costruttiva, può invece essere visto come un suo vantaggio.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

O. Aberth, McGraw Hill (1980) *Computable Analysis*.

Douglas S. Bridges, "A constructive look at the real number line", in P. Ehrlich (ed.) (1994), Kluwer, pp. 29-91 *Real numbers, Generalization of Reals, and theories of continua*.





## **Zeoliti sintetiche per cementi pozzolanici**

Nota di Giuseppe Frigione e Luciano Bonavita<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Ordinario Riccardo Sersale  
(Adunanza dell'1 marzo 2002)

*Key words:* natural zeolites, neapolitan yellow tuff, pozzolanic activity, assessment of pozzolanic activity, silica fume, synthetic zeolites.

*Parole chiave:* zeolite naturale, tufo giallo napoletano, attività pozzolanica, test di pozzolanicità, fumo di silice, zeoliti sintetiche.

**Abstract** - Different zeolites have been studied in order to be employed in cements as supplementary materials with very high pozzolanic activity. The activity has been determined both in terms of binding lime capacity and the reaction rate. The mechanical behaviour has been determined according to UNI-EN 196.1, and compared with that determined on two commercial silica fume and on a natural zeolite, namely the neapolitan yellow tuff. The synthetic zeolites show pozzolanic and mechanical characteristics higher than or equal to those of silica fumes and well higher than those of the neapolitan yellow tuff.

**Riassunto** - Sono state studiate alcune zeoliti sintetiche per il loro eventuale impiego nei cementi quali aggiunte pozzolaniche ad elevatissima attività. L'attività pozzolanica è stata determinata sia in termini di capacità di fissare la calce, sia di velocità di reazione. Il comportamento meccanico è stato determinato in accordo con la UNI-EN 196.1. Termini di paragone due campioni di fumo di silice commerciale ed una zeolite naturale, quale il tufo giallo napoletano. Le zeoliti preparate presentano caratteristiche di pozzolanicità e meccaniche superiori o uguali a quelle presentate dai fumi di silice e nettamente migliori di quelle del tufo giallo.

### **1 - INTRODUZIONE**

La Norma Europea per le costruzioni in calcestruzzo armato (1) consiglia l'impiego di cemento pozzolanico in opere soggette a forti azioni corrosive. Secondo la Norma sui cementi (2) affinché un cemento sia dichiarabile pozzolanico (Type IV) deve esser soddisfatto il test di pozzolanicità (3).

---

<sup>1</sup> Università degli Studi della Calabria, Dipartimento di Ingegneria Chimica e dei Materiali. 87030 Rende, Cosenza (Italy).

L'ammontare di pozzolana necessaria per soddisfare tale test dipende dalla qualità della pozzolana, cioè dalla quantità di  $\text{Ca(OH)}_2$  proveniente dall'idratazione dei silicati del clinker Portland che la pozzolana riesce a combinare entro un determinato periodo di tempo.

In pratica, solo una pozzolana ad elevata attività può essere miscelata con un'alta percentuale di cemento Portland al fine di ottenere un cemento di miscela con solo un leggero decremento delle resistenze iniziali e allo stesso tempo rendere positivo il test (4). Per la sua alta reattività, è possibile usare a tale scopo il fumo di silice. Tuttavia, il suo utilizzo è limitato, a causa dell'elevato costo di trasporto, alle aree geografiche nelle quali si produce (5).

L'attività pozzolanica include due parametri: la quantità massima di idrossido di calcio che la pozzolana può legare e la velocità con la quale procede questa reazione. L'elevata attività pozzolanica del fumo di silice deriva dalla sua composizione chimica, dall'elevato contenuto di silice, e dalla dimensione sub microscopica delle particelle (5). La dimensione molto piccola delle particelle fa sì che la reazione topochimica con l'idrossido di calcio prodotto dall'idratazione del cemento Portland sia molto rapida (4).

Sersale e Frigione (6,7,8,9,10) hanno mostrato che alcune zeoliti naturali sono eccellenti pozzolane ed hanno descritto il loro utilizzo quali costituenti di cementi pozzolanici. D'altra parte, Katovic *et al.* (11,12,13,14) hanno prodotto zeoliti con dimensioni molto piccole delle particelle.

Obiettivo del presente lavoro è quello di trasferire queste conoscenze al campo dei cementi ad alta resistenza iniziale, onde trovare un efficace sostituto industriale al fumo di silice.

## 2 - PARTE SPERIMENTALE

### 2.1 Materiali

Sono stati utilizzati:

- quattro differenti zeoliti aventi dimensioni delle particelle inferiori al micron. Esse nel seguito sono indicate con le sigle BEA, MOR, TON ed MFI, secondo la convenzione *Structure Commission International Zeolite Association* (15);
- una zeolite sintetica MFI con dimensione delle particelle superiori a 5 micron;
- una zeolite naturale (NZ) "Tufo giallo napoletano" di elevata attività pozzolanica (16) macinato fino a residuo zero sullo staccio da 32 microns;
- due diversi Fumi di silice: Silica fume "Force 10.000" della Grace e "Sikafume" della Sika rispettivamente nel seguito indicate con SF1 e SF2;
- Cemento Tipo I 52,5R (UNI-EN 197/1).

### 2.2 Preparazioni delle zeoliti

Le zeoliti sintetiche sono state ottenute partendo dal sistema:



dove:

$x=0,1$ ;  $y=0,1$ ;  $z=0,02$ ;  $w=20$  per la zeolite BEA e per la MOR;

$x=0,1$ ;  $y=0,08$ ;  $z=0,0$ ;  $w=20$  per la zeolite MFI;

$x=0,06$ ;  $y=15$ ;  $z=0,0$ ;  $w=10$  per la zeolite TON;

mentre ORG sta per composto organico che é:

idrossido e bromuro di tetraetilammonio per la zeolite BEA e MOR; bromuro di tetrapropilammonio nel caso della zeolite MFI; metanolo per la zeolite TON.

Le sintesi sono state condotte miscelando ed omogeneizzando alluminato sodico e idrossido di sodio, e successivamente aggiungendo il composto organico e la fonte di silice.

Le zeoliti BEA, MFI e MOR sono state preparate in condizioni statiche alla pressione autogena in un intervallo di temperatura compreso tra 140 e 170 °C in funzione del tipo di zeolite. La zeolite TON é stata preparata in agitazione e alla pressione autogena a 140 °C. Ulteriori dettagli sulla procedura di sintesi sono riportati in Katovic *et al.* (11,12,13,14).

Le zeoliti sono state caratterizzate per quanto attiene a:

- analisi chimica (assorbimento atomico),
- struttura (XRD),
- forma e dimensione delle particelle (SEM),
- superficie specifica (adsorbimento-desorbimento di azoto).

### 2.3 Caratteristiche chimiche e fisiche

In tabella 1 sono riportate le caratteristiche delle zeoliti e degli altri materiali pozzolanici utilizzati. Il cemento é un prodotto commerciale le cui caratteristiche sono riportate in tabella 2.

Tabella 1: Caratteristiche dei materiali pozzolanici.

| Materiali                 | Dimensioni delle particelle ( $\mu\text{m}$ ) | Forma              | Superficie specifica ( $\text{m}^2/\text{g}$ ) | $\text{SiO}_2$ (%) | $\text{Na}_2\text{O}$ (%) | $\text{Al}_2\text{O}_3$ (%) |
|---------------------------|-----------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------|--------------------|---------------------------|-----------------------------|
| TON                       | 0,6 ÷ 1,0                                     | ad aghi            | 32                                             | 98,6               | 1,3                       | -                           |
| BEA                       | 0,1 ÷ 0,3                                     | sferica            | 70                                             | 93,0               | 2,0                       | 4,9                         |
| MFI < 1 $\mu\text{m}$     | 0,3 ÷ 0,7                                     | sferica            | 13                                             | 98,6               | 1,2                       | -                           |
| MFI > 5 $\mu\text{m}$     | 5,0 ÷ 8,0                                     | sferica            | 9                                              | 98,6               | 1,2                       | -                           |
| BEA + MOR                 | BEA: 0,1÷0,3<br>MOR: 2,0÷9,0                  | sferica<br>sferica | 47                                             | 95,5               | 1,1                       | 3,1                         |
| Tufo giallo<br>Napoletano | 0,7 ÷ 30,0                                    |                    |                                                |                    |                           |                             |
| Silica Fume<br>SF1        | 0,1 ÷ 0,8                                     | sferica            | 26                                             | 97,1               | 0,1                       | 0,5                         |
| Silica Fume<br>SF2        | 0,1 ÷ 1,3                                     | sferica            | 20                                             | 95,2               | 0,2                       | 0,5                         |

Tabella 2: Caratteristiche del cemento Portland.

| Superficie<br>specifica<br>Blaine<br>(m <sup>2</sup> /kg) | Costituzione potenziale (%) |                  |                  |                   |       |
|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|------------------|------------------|-------------------|-------|
|                                                           | C <sub>3</sub> S            | C <sub>2</sub> S | C <sub>3</sub> A | C <sub>4</sub> AF | Gesso |
| 390                                                       | 55                          | 19               | 7                | 11                | 5     |

#### 2.4 Determinazione dell'attività pozzolanica

All'uopo si é utilizzato il test di pozzolanicit  (3). La capacit  del materiale pozzolanico di fissare la calce   stata determinata definendo, dopo 8 giorni di stagionatura, il rapporto minimo zeolite/cemento Portland (Z/PC) necessario per rendere il test positivo.

La velocit  della reazione pozzolanica   stata misurata determinando il tempo - in giorni - necessario affin  che il test sia positivo per un fissato rapporto Z/PC = 15/85.

#### 2.5 Caratteristiche meccaniche

Sono state preparate miscele con il cemento Portland CEM I classe 52,5 sostituendo parte di esso con le quantit  di materiale pozzolanico che hanno reso positivo il saggio a 8 giorni. Queste miscele sono state saggiate sia a compressione a 2, 7 e 28 giorni in accordo con la UNI-EN 196.1 (17) sia per quanto attiene la lavorabilit  secondo la UNI 7044 (18). Termine di paragone il cemento Portland non addizionato.

### 3 - RISULTATI E DISCUSSIONE

In fig. 1 sono mostrate le quantit  di materiale pozzolanico necessarie a che il test risulti positivo dopo 8 giorni di stagionatura. Nella fig. 2   invece mostrato il tempo necessario affin  che risulti positiva al test di pozzolanicit  la miscela (materiale pozzolanico)/cemento Portland : 15/85.

Si osserva che il test risulta positivo con:

- il 6% di zeolite TON; il 9% di zeolite MFI con dimensioni delle particelle inferiori al micron; il 25% di zeolite MFI con dimensioni delle particelle superiori a 5 micron; il 13% di zeolite BEA; 14% per la zeolite BEA+MOR;
- il 14% di tufo giallo napoletano;
- il 10% di fumo di silice SF1; il 13% di fumo di silice SF2.

Dai risultati riportati in fig.2, si pu  notare che per la zeolite TON il test   positivo dopo 2 giorni; per la zeolite BEA dopo 3 giorni, e dopo 5 giorni per la miscela BEA+MOR, la zeolite MFI < 1 micron, il fumo di silice SF1 e la zeolite

naturale. Il fumo di silice SF2 richiede 6 giorni mentre la MFI > 5 microns 14 giorni.

In conclusione, sia per quanto riguarda la capacità che la velocità di reazione pozzolanica, i migliori risultati sono ottenuti con la zeolite TON, la quale ha mostrato attività pozzolanica nettamente maggiore di quella del fumo di silice. I comportamenti mostrati dalla zeolite BEA, dalla MFI con piccole particelle, dalla miscela BEA+MOR e dal fumo di silice SF1 sono simili ma migliori di quello della zeolite naturale e del fumo di silice SF2.

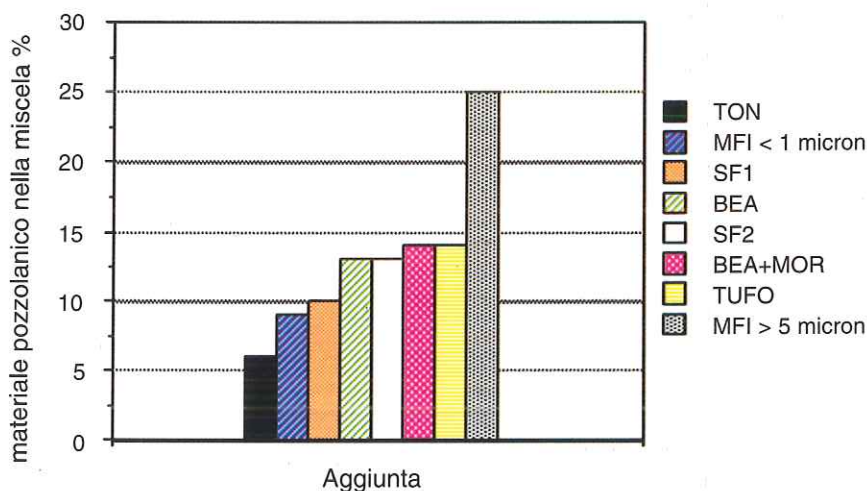


Figura 1: Capacità pozzolanica dopo 8 giorni

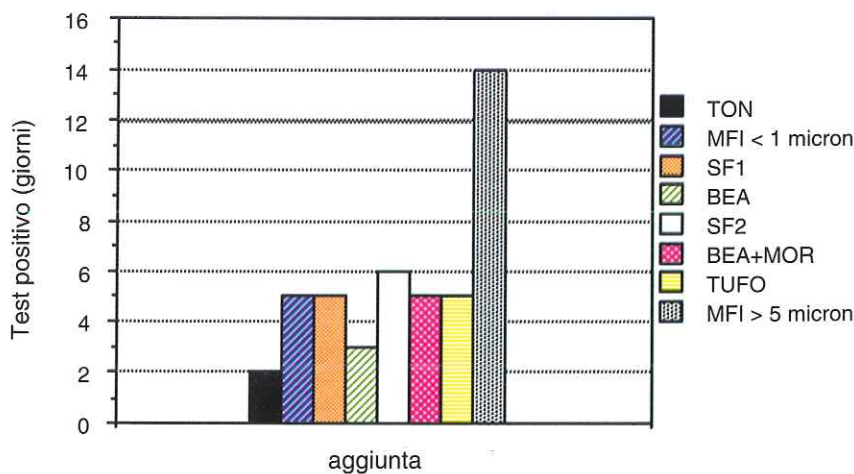


Figura 2: Velocità di reazione (miscela 15/85)

Tabella 3: Caratteristiche di lavorabilità e di resistenza meccanica dei cementi preparati con le zeoliti

| Cemento | %   | Aggiunta                 | %  | 2<br>giorni<br>MPa | 7<br>giorni<br>MPa | 28<br>giorni<br>MPa | Lavorabilità<br>(Spandimento)<br>% |
|---------|-----|--------------------------|----|--------------------|--------------------|---------------------|------------------------------------|
| CEM I   | 100 | -                        | -  | 36,4               | 47,7               | 56,2                | 68                                 |
| CEM I   | 90  | Fumo di<br>silice SF1    | 10 | 34,9               | 44,8               | 58,9                | 52                                 |
| CEM I   | 87  | Fumo di<br>silice SF2    | 13 | 32,2               | 43,0               | 57,9                | 50                                 |
| CEM I   | 87  | Zeolite<br>BEA           | 13 | 36,7               | 49,2               | 64,3                | 57                                 |
| CEM I   | 91  | Zeolite<br>MFI < 1 $\mu$ | 9  | 37,0               | 46,1               | 56,0                | 72                                 |
| CEM I   | 94  | Zeolite<br>TON           | 6  | 32,2               | 41,4               | 54,8                | 7                                  |
| CEM I   | 86  | Tufo<br>giallo           | 14 | 30,1               | 41,5               | 55,8                | 60                                 |

Per quanto attiene al comportamento meccanico, dalla Tabella 3 si osserva un eccellente comportamento della zeolite MFI che presenta resistenze uguali, anche a breve, a quelle del cemento Portland ed un leggero incremento di lavorabilità. Buono anche il comportamento della BEA migliore di quello dei fumi di silice. Non soddisfacente il comportamento della TON, in particolare per quanto attiene alla lavorabilità.

#### 4 - CONCLUSIONI

Alcune zeoliti sintetiche presentano attività pozzolanica e caratteristiche idrauliche maggiori o uguali a quelle presentate dal fumo di silice e sempre maggiori del tufo giallo napoletano. E' pertanto possibile utilizzare queste zeoliti sintetiche per la preparazione di cementi pozzolanici ad elevata resistenza iniziale. In particolare si nota che un cemento preparato con il 9 % di zeolite MFI accoppia elevate caratteristiche di pozzolanicità, resistenze meccaniche a breve e lunghe scadenze ed ottima lavorabilità.

## 6 - RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. UNI-EN 206 (2001). *Calcestruzzo. Prestazioni, produzione, posa in opera e criteri di conformità*. Milano.
2. UNI-EN 197 Parte 1 - (2001). *Cemento. Composizione, specifiche e criteri di conformità. Cementi comuni*. Milano.
3. UNI EN 196 Parte 5 - (1996). *Metodi di prova dei cementi. Prova di pozzolanicità dei cementi pozzolanici*. Milano.
4. Massazza F; (1995). *Pozzolana and Pozzolan Cements*. A Chapter of "Lea's Chemistry of Cement and Concrete. Fourth Edition. P.C.Hewlett. Ed. Arnold. London.
5. Neville A.M.. (1995). *Properties of Concrete*. 4th Edition. Longman Group Essex (UK).
6. Sersale R. and Frigione G.; (1985). *Stud. Surf. Sci. Catal.* Vol 24 p 523.
7. Sersale R. and Frigione G.; (1985). *Chim Ind.* Vol 67 p177.
8. Sersale R. and Frigione G.; (1987). *Cem. Concr. Res.* Vol 17 (3) p 404.
9. Sersale R., Frigione G.; (1987). *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. in Napoli*. Special Issue. p 307.
10. Sersale R. and Frigione G.; (1983). *Italian Patent* N° 49221 A 83
11. Katovic A., Subotic B., Smit I. and Despotovic Lj.A., (1990). *Kinetics and Crystallization. Zeolite* Vol 10 p 634.
12. Katovic A., Caputo D. and Giordano G.; (2000) *Proc. AIZ-GIC 2000*. Ravello. p 29.
13. Katovic A., Catanzaro L. and Giordano G.; (2000) *Proceedings of AIZ-GIC 2000*. Ravello. Italy. p 363.
14. Cosentino F., Katovic A., Giordano G., Lentz P. and Nagy J. B.; (1999). *Stud. Surf. Sci. Catal.*, Vol 125. p 109.
15. Meier W. M., Olson D.H. and Baerlocher Ch.; (1996). *Atlas of Zeolite Structure Type*. Fourth Edition. Ed. Elsevier. London.
16. Sersale R.; (1958). *Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. in Napoli*. Vol 25 p 181.
17. UNI EN 196 Parte 1 - (1996). *Metodi di prova dei cementi. Determinazione delle resistenze meccaniche*. Milano.
18. UNI 7044 (1972). *Determinazione della consistenza delle malte cementizie mediante l'impiego di tavola a scosse*. Milano.





## Beltrami operators in the plane

Nota di Maria Rosaria Formica<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Carlo Sbordone  
(Adunanza del 3 maggio 2002)

**Key words:** elliptic equations,  $G$ -convergence.

**Abstract.** Following Morrey [?] we associate to any measurable symmetric  $2 \times 2$  matrix valued function  $A(x)$  such that

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  and to any  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  another symmetric  $2 \times 2$  matrix valued function  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u)$  with  $\det \mathcal{A} = 1$  and satisfying

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle \mathcal{A}(x)\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

We study the properties of  $\mathcal{A}$  as a function of  $A$  and  $u$ .

**Riassunto.** Seguendo Morrey [?], ad ogni matrice simmetrica  $A(x)$  a coefficienti misurabili, tale che

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e ad ogni  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  si può associare un'altra matrice simmetrica  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u)$  con  $\det \mathcal{A} = 1$  e soddisfacente

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle \mathcal{A}(x)\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Si studiano le proprietà di  $\mathcal{A}$  come funzione di  $A$  e di  $u$ .

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Complesso Universitario di Monte S. Angelo, via Cintia, 80126- Napoli. E-mail: mformica@unina.it

## 0.1 Introduction

Let  $\Omega$  be a bounded open set in  $\mathbb{R}^2$  and  $K \geq 1$  a fixed real number. Denote by  $\mathcal{E}(K)$  the set of symmetric matrix valued functions

$$A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

verifying the bounds

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A(x)\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2$$

for a.e.  $x \in \Omega$  and  $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$ .

For  $A \in \mathcal{E}(K)$ ,  $A = (a_{ij})$  and  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  define a new matrix valued function  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u)$

$$\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

whose entries  $(\alpha_{ij})$  are given by

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(x) &= \frac{u_{x_2}^2 + \left( \sum_{j=1}^2 a_{1j} u_{x_j} \right)^2}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle}, \\ \alpha_{12}(x) = \alpha_{21}(x) &= \frac{-u_{x_1} u_{x_2} + \left( \sum_{j=1}^2 a_{1j} u_{x_j} \right) \left( \sum_{j=1}^2 a_{2j} u_{x_j} \right)}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle}, \\ \alpha_{22}(x) &= \frac{u_{x_1}^2 + \left( \sum_{j=1}^2 a_{2j} u_{x_j} \right)^2}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} \end{aligned}$$

if  $\langle A \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \neq 0$  otherwise, let  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1, \alpha_{12} = 0$ . (See [?])

The main relation between matrices  $A$  and  $\mathcal{A}(A, u)$  is the following: if  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , then

$$\operatorname{div}(A \nabla u) = 0$$

if and only if

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}(A, u) \nabla u) = 0.$$

Moreover, by improving Morrey's results, we show that  $A \in \mathcal{E}(K)$  implies  $\mathcal{A} \in \mathcal{E}(K)$ . (See also [?], [?]). We will call  $\operatorname{div}(\mathcal{A}(A, u) \nabla)$  the *Beltrami operator* associated to  $A$  and  $u$ .

Our aim is to prove the following

**THEOREM 0.1.1.** *Let  $\mathcal{A}_h \in \mathcal{E}(K)$  and assume  $A_h \xrightarrow{G} A$ . Let  $u_h, u \in W^{1,2}(\Omega)$  satisfy*

$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,2}(\Omega)$$

and

$$\operatorname{div}(A_h \nabla u_h) = 0.$$

Then

$$\mathcal{A}(A_h, u_h) \xrightarrow{G} \mathcal{A}(A, u).$$

(For related results, see [?], [?]).

Let us recall the definition of  $G$ -convergence for a sequence of matrix valued functions  $A_h \in \mathcal{E}(K)$ . We say  $A_h \xrightarrow{G} A$  if, for any sequence  $u_h \in W^{1,2}(\Omega)$ , if

$$\operatorname{div}(A_h \nabla u_h) = 0 \tag{1}$$

and

$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,2}(\Omega) \tag{2}$$

then

$$\operatorname{div}(A \nabla u) = 0.$$

**REMARK 0.1.1.** It is well known [?], [?] that from (1), (2) it follows that

$$A_h \nabla u_h \rightharpoonup A \nabla u \text{ in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

## 0.2 Some preliminary results

Let  $W$  be a  $2 \times 2$  matrix

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

with  $\det W \neq 0$  and set

$$\mathcal{A} = \left[ \frac{W^t W}{\det W} \right]^{-1}. \tag{4}$$

We have the following elementary result

LEMMA 0.2.1. *If  $W$  and  $\mathcal{A}$  are defined as above, then  $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}$  and*

$$\det \mathcal{A} = 1.$$

*Proof.* It is easy to check that  $\mathcal{A}$  has the following expression

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\det W} \begin{pmatrix} w_2^2 + w_4^2 & -(w_1 w_2 + w_3 w_4) \\ -(w_1 w_2 + w_3 w_4) & w_1^2 + w_3^2 \end{pmatrix}.$$

Then it is obvious that  $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}$  and

$$\det \mathcal{A} = \frac{(w_1 w_4 - w_2 w_3)^2}{(\det W)^2} = 1.$$

For  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  and  $A \in \mathcal{E}(K)$ , define  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u) = (\alpha_{ij})$  as in the Introduction if  $\sum_{ij} a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \neq 0$ . Otherwise we set  $\mathcal{A} = (\delta_{ij})$ .

PROPOSITION 0.2.1. *If  $\mathcal{A}$  is defined as above, then  $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}$  and  $\det \mathcal{A} = 1$ .*

*Proof.* If we set

$$\begin{aligned} w_1 &= u_{x_1} \quad , \quad w_2 = u_{x_2} \\ w_3 &= -\sum_j a_{2j} u_{x_j} \quad , \quad w_4 = \sum_j a_{1j} u_{x_j} \end{aligned}$$

and

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

then  $\sum_{ij} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \neq 0$  if and only if  $\det W \neq 0$  and we have

$$\mathcal{A} = \left[ \frac{W^t W}{\det W} \right]^{-1}.$$

So, the result follows by Lemma 2.1.

PROPOSITION 0.2.2. *Let  $u$  be any function in  $W^{1,2}(\Omega)$ . Then*

$$\mathcal{A}(A, u) = A$$

*if and only if  $\det A = 1$ .*

*Proof.* If  $\mathcal{A}(u, A) = A$ , Proposition 0.2.1 implies  $\det A(x) = \det \mathcal{A}(x) = 1$ . Conversely, if  $\det A(x) = 1$ , we have  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 1$ , so by replacing  $a_{11}a_{22} = 1 + a_{12}^2$  into the expression of  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , we have

$$\alpha_{11} = \frac{a_{11}^2 u_{x_1}^2 + 2a_{11}a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{11}a_{22}u_{x_2}^2}{a_{11}u_{x_1}^2 + 2a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{22}u_{x_2}^2} = a_{11},$$

$$\alpha_{12} = \frac{a_{11}a_{12}u_{x_1}^2 + 2a_{12}^2u_{x_1}u_{x_2} + a_{12}a_{22}u_{x_2}^2}{a_{11}u_{x_1}^2 + 2a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{22}u_{x_2}^2} = a_{12},$$

$$\alpha_{22} = \frac{a_{11}a_{22}u_{x_1}^2 + 2a_{12}a_{22}u_{x_1}u_{x_2} + a_{22}^2u_{x_2}^2}{a_{11}u_{x_1}^2 + 2a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{22}u_{x_2}^2} = a_{22}.$$

**Example 2.1.** Let  $A$  be a diagonal matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & 0 \\ 0 & a_{22}(x) \end{pmatrix}$$

Then, if  $u = u(x_1)$

$$\mathcal{A}(A, u) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{11}(x)} \end{pmatrix}.$$

If  $v = v(x_2)$

$$\mathcal{A}(A, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{22}(x)} & 0 \\ 0 & a_{22}(x) \end{pmatrix}.$$

Indicating by  $\alpha_{ij}$  the entries of  $\mathcal{A}(A, u)$  we obtain, by the definition of  $\mathcal{A}(A, u)$

$$\alpha_{11} = \frac{a_{11}^2 u_{x_1}^2}{a_{11} u_{x_1}^2} = a_{11}$$

$$\alpha_{12} = 0$$

$$\alpha_{22} = \frac{u_{x_1}^2}{a_{11}^2 u_{x_1}^2} = \frac{1}{a_{11}}.$$

The other case can be treated similarly.

**Example 2.2.** If the matrix  $A$  is isotropic, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & a(x) \end{pmatrix}$$

and  $\nabla u \neq 0$  then it is immediate that

$$\mathcal{A}(A, u) = \frac{1}{|\nabla u|^2} \begin{pmatrix} a(x)u_{x_1}^2 + \frac{1}{a(x)}u_{x_2}^2 & \left(a(x) - \frac{1}{a(x)}\right)u_{x_1}u_{x_2} \\ \left(a(x) - \frac{1}{a(x)}\right)u_{x_1}u_{x_2} & \frac{1}{a(x)}u_{x_1}^2 + a(x)u_{x_2}^2 \end{pmatrix}.$$

The following proposition shows that passing from  $A$  to  $\mathcal{A}(A, u)$  the coercivity and boundness constants are exactly preserved.

**PROPOSITION 0.2.3.** *If  $\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2$  for any  $\xi \in \mathbb{R}^2$  then we have also*

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leq \langle \mathcal{A}(A, u)\xi, \xi \rangle \leq K|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

*Proof.* Since  $\det A = 1$ , by [?] it follows that there exist  $1 \leq K(x) \leq K$  and  $e(x)$  a unit vector  $|e(x)| = 1$  such that

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{K(x)}I + \left(K(x) - \frac{1}{K(x)}\right)e(x) \otimes e(x)$$

(here if  $e = (e_1, e_2)$ , by  $e \otimes e$  we denote the matrix whose entries are  $e_i e_j$ ).

Then for  $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$\langle \mathcal{A}(x)\xi, \xi \rangle = \frac{1}{K(x)}|\xi|^2 + \left(K(x) - \frac{1}{K(x)}\right)\langle e(x), \xi \rangle^2$$

and we deduce immediately by this expression that

$$\frac{|\xi|^2}{K(x)} \leq \langle \mathcal{A}(x)\xi, \xi \rangle \leq K(x)|\xi|^2$$

which imply (5).

PROPOSITION 0.2.4. *If  $A = (a_{ij})$  and  $a_{12} = 0$ , then, assuming  $u_{x_i} \neq 0$  for  $i = 1, 2$  the matrix*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u) = (\alpha_{ij})$$

*verifies*

$$\alpha_{12} = 0$$

*if and only if*

$$A = \mathcal{A}.$$

*Proof.* Under our assumptions, we deduce  $a_{11}u_{x_1}^2 + a_{22}u_{x_2}^2 \neq 0$  and

$$\alpha_{12} = \frac{(a_{11}a_{22} - 1)u_{x_1}u_{x_2}}{a_{11}u_{x_1}^2 + a_{22}u_{x_2}^2}. \quad (6)$$

Therefore, if  $\alpha_{12} = 0$ , by (6) we deduce  $a_{11}a_{22} - 1 = 0$ , i.e.  $\det A = 1$ . Using proposition 0.2.2 we get  $\mathcal{A} = A$ .

The following proposition illustrates the interplay between the equations

$$\operatorname{div} (A \nabla u) = 0$$

$$\operatorname{div} (\mathcal{A}(A, u) \nabla u) = 0.$$

PROPOSITION 0.2.5. *If  $A \in \mathcal{E}(K)$  and  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , then*

$$\mathcal{A}(A, u) \nabla u = A \nabla u \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

*Proof.* We have to prove that

$$\begin{cases} a_{11}u_{x_1} + a_{12}u_{x_2} = \alpha_{11}u_{x_1} + \alpha_{12}u_{x_2} \\ \alpha_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2} = \alpha_{12}u_{x_1} + \alpha_{22}u_{x_2} \end{cases}$$

By the definition of  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u)$  as in the Introduction we have

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u_{x_1} + \alpha_{12}u_{x_2} = & \frac{u_{x_2}^2 + a_{11}^2u_{x_1}^2 + 2a_{11}a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{12}^2u_{x_2}^2}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} u_{x_1} + \\ & + \frac{-u_{x_1}u_{x_2} + a_{11}a_{12}u_{x_1}^2 + a_{11}a_{22}u_{x_1}u_{x_2} + a_{12}^2u_{x_1}u_{x_2} + a_{12}a_{22}u_{x_2}^2}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} u_{x_2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} \{ u_{x_1} u_{x_2}^2 + a_{11}^2 u_{x_1}^3 + 2a_{11} a_{12} u_{x_1}^2 u_{x_2} + a_{12}^2 u_{x_1} u_{x_2}^2 + \\
&- u_{x_1} u_{x_2}^2 + a_{11} a_{12} u_{x_1}^2 + a_{11} a_{22} u_{x_1} u_{x_2}^2 + a_{12}^2 u_{x_1} u_{x_2}^2 + a_{12} a_{22} u_{x_2}^3 \} = \\
&= \frac{1}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} \{ a_{11} u_{x_1} [a_{11} u_{x_1}^2 + 2a_{12} u_{x_1} u_{x_2} + a_{22} u_{x_2}^2] + \\
&+ a_{12} u_{x_2} [a_{11} u_{x_1}^2 + 2a_{12} u_{x_1} u_{x_2} + a_{22} u_{x_2}^2] \} = \\
&= a_{11} u_{x_1} + a_{12} u_{x_2}
\end{aligned}$$

Similarly we have also

$$\begin{aligned}
&\alpha_{12} u_{x_1} + \alpha_{22} u_{x_2} = \\
&\frac{-u_{x_1} u_{x_2} + a_{11} a_{12} u_{x_1}^2 + a_{11} a_{22} u_{x_1} u_{x_2} + a_{12}^2 u_{x_1} u_{x_2} + a_{12} a_{22} u_{x_2}^2}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} u_{x_1} + \\
&+ \frac{u_{x_1}^2 + a_{12}^2 u_{x_1}^2 + 2a_{12} a_{22} u_{x_1} u_{x_2} + a_{22}^2 u_{x_2}^2}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} u_{x_2} = \\
&= \frac{1}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} \{ -u_{x_1}^2 u_{x_2} + a_{11} a_{12} u_{x_1}^3 + a_{11} a_{22} u_{x_1}^2 u_{x_2} + a_{12}^2 u_{x_1}^2 u_{x_2} + a_{12} a_{22} u_{x_1} u_{x_2}^2 \\
&+ u_{x_1}^2 u_{x_2} + a_{12}^2 u_{x_1}^2 u_{x_2} + 2a_{12} a_{22} u_{x_1} u_{x_2}^2 + a_{22}^2 u_{x_2}^3 \} = \\
&= \frac{1}{\langle A \nabla u, \nabla u \rangle} \{ a_{12} u_{x_1} [a_{11} u_{x_1}^2 + 2a_{12} u_{x_1} u_{x_2} + a_{22} u_{x_2}^2] + \\
&+ a_{22} u_{x_2} [a_{11} u_{x_1}^2 + 2a_{12} u_{x_1} u_{x_2} + a_{22} u_{x_2}^2] \} = \\
&= a_{12} u_{x_1} + a_{22} u_{x_2}
\end{aligned}$$



COROLLARY 0.2.1. If  $A \in \mathcal{E}(K)$  and  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  solves the equation

$$\operatorname{div} A \nabla u = 0$$

then  $u$  solves also the equation

$$\operatorname{div} \mathcal{A} \nabla u = 0$$

where  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u)$ .

*Proof.* Is an immediate consequence of Proposition 0.2.4.

PROPOSITION 0.2.6. Let  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{E}(K)$ ,  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  and  $v \in W^{1,2}(\Omega)$  verify

$$\begin{cases} v_{x_1} = a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2} \\ v_{x_2} = -(a_{11}u_{x_1} + a_{12}u_{x_2}) \end{cases} \quad (7)$$

then

$$\mathcal{A}(A, u) = \mathcal{A}\left(\frac{A}{\det A}, v\right).$$

*Proof.*

We define  $\mathcal{A}\left(\frac{A}{\det A}, v\right) = (\beta_{ij})$  and  $B = (b_{ij}) = \frac{A}{\det A}$ , so we have by the definition of  $\mathcal{A}(B, v)$

$$\beta_{11} = \frac{v_{x_2}^2 + b_{11}^2 v_{x_1}^2 + 2b_{11}b_{12}v_{x_1}v_{x_2} + b_{12}^2 v_{x_2}^2}{b_{11}v_{x_1}^2 + 2b_{12}v_{x_1}v_{x_2} + b_{22}v_{x_2}^2},$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \frac{-v_{x_1}v_{x_2} + b_{11}b_{12}v_{x_1}^2 + b_{11}b_{22} + b_{12}^2 + v_{x_1}v_{x_2} + b_{12}b_{22}v_{x_2}^2}{b_{11}v_{x_1}^2 + 2b_{12}v_{x_1}v_{x_2} + b_{22}v_{x_2}^2},$$

$$\beta_{22} = \frac{v_{x_1}^2 + b_{12}^2 v_{x_1}^2 + 2b_{12}b_{22}v_{x_1}v_{x_2} + b_{22}^2 v_{x_2}^2}{b_{11}v_{x_1}^2 + 2b_{12}v_{x_1}v_{x_2} + b_{22}v_{x_2}^2}.$$

Now our aim is to prove that  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . By (7) we have

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{1}{\det A} \{ a_{11}^2 (a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})^2 + 2a_{11}a_{12}(a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})(-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2}) + \\ &\quad + [( \det A )^2 + a_{12}^2](-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2})^2 \} / \\ &\quad / a_{11}(a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})^2 + 2a_{12}(a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})(-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2}) + \\ &\quad + a_{22}(-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2})^2. \end{aligned}$$

Now, set  $N_{11}$  and  $D_{11}$  respectively the numerator and the denominator of  $\beta_{11}$ , we have easily

$$N_{11} = (\det A)^2 [a_{11}^2 u_{x_1}^2 + 2a_{11}a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + (1 + a_{12}^2)u_{x_2}^2]$$

and

$$D_{11} = (\det A)^2 (a_{11}u_{x_1}^2 + 2a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{22}u_{x_2}^2)$$

then

$$\beta_{11} = \frac{N_{11}}{D_{11}} = \frac{a_{11}^2 u_{x_1}^2 + 2a_{11}a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + (1 + a_{12}^2)u_{x_2}^2}{a_{11}u_{x_1}^2 + 2a_{12}u_{x_1}u_{x_2} + a_{22}u_{x_2}^2} = \alpha_{11}.$$

In analogous way it is

$$\begin{aligned} \beta_{12} = & a_{11}a_{12}(a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})^2 + [a_{11}a_{22} + a_{12}^2 - (\det A)^2](a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2}) \cdot \\ & \cdot (-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2}) + a_{12}a_{22}(-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2})^2 / \\ & / a_{11}(a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})^2 + 2a_{12}(a_{12}u_{x_1} + a_{22}u_{x_2})(-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2}) + \\ & + a_{22}(-a_{11}u_{x_1} - a_{12}u_{x_2})^2 \end{aligned}$$

and it is easily seen that

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \alpha_{12}.$$

Finally it follows also that

$$\beta_{22} = \alpha_{22}$$

which complete the proof.

*Proof of Theorem 1.1.* By Remark 1.1 it follows that

$$A_h \nabla u_h \rightharpoonup A \nabla u \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^2). \quad (8)$$

By a well known compactness result for  $G$ -convergence [?], [?] there is a matrix  $A_0 \in \mathcal{E}(K)$  such that

$$\mathcal{A}_{h_j} \xrightarrow{G} \mathcal{A}_0$$

for a subsequence. Then it is also

$$\mathcal{A}_{h_j} \nabla u_{h_j} \rightharpoonup \mathcal{A}_0 \nabla u \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathbb{R}^2). \quad (9)$$

Now Proposition 0.2.5 and (8), (9) imply

$$\mathcal{A}_0 \nabla u = A \nabla u = \mathcal{A} \nabla u$$

where  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(A, u)$  is the matrix defined in Introduction. The last equality allows us to identify the  $G$ -limit  $\mathcal{A}_0$ , i.e.

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A},$$

due to the fact that both matrices belong to  $\mathcal{E}(K)$  and their determinant is one.

## Bibliography

- [1] C. Capone, *Quasiharmonic fields and Beltrami operators*, Comm. Math. Univ. Carolinae (to appear).
- [2] M.R. Formica, *On the  $\Gamma$ -convergence of Laplace-Beltrami operators in the plane*, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, vol.25 (2000), 423-438.
- [3] T. Iwaniec, C. Sbordone, *Quasiharmonic fields*, Ann. Inst. H. Poincaré - AN 18, 5 (2001), 519-572.
- [4] C.B. Morrey, *On the solution of quasilinear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126-166.
- [5] F. Murat, *Compacité par Compensation*, Ann.Scu. Norm. Pisa 5 (1978), 489-507.
- [6] S. Spagnolo, *Some convergence problems*, Symposia Mathematica XVIII (1976), 391-397.
- [7] L. Tartar, *Homogénéization et compacité par compensation*, Cours Peccot, College de France (1977).

## On the nonlinear diffusion in half spaces with application to the porous media

Nota di S. Rionero<sup>1</sup> e F. Perrini<sup>1</sup>

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero  
(Adunanza del 18 settembre 2002)

**Abstract.** The nonlinear diffusion equation  $u_t = \Delta F(u)$  is studied in a half space under Dirichelet boundary conditions. Pointwise stability conditions for the steady states are obtained allowing the perturbations to grow polinomially at large spatial distances. The results are applied to the porous medium and horizontal filtration equations.

**Riassunto.** Viene esaminato il problema di Dirichelet per l'equazione  $u_t = \Delta F(u)$  in un semispazio. Si ottengono condizioni di stabilità puntuale degli stati stazionari consentendo alle perturbazioni di crescere polinomialmente all'infinito. I risultati ottenuti sono applicati alla diffusione nei mezzi porosi ed alla filtrazione orizzontale.

### 1. Introduction

Let  $u$  be a scalar valued function from  $\mathbb{R}^3$  into  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  a domain in  $\mathbb{R}^3$  and  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$  with  $T = \text{const.} > 0$ . We consider - under prescribed initial and Dirichelet boundary data - the non-linear diffusion equation of the type

$$u_t = \Delta F(u) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (1)$$

As it is well known, when  $\Omega$  is bounded, equations (1) has been deeply and extensively investigated by many authors (see, for instance [1]-[6], and the references therein). On the contrary - when  $\Omega$  is unbounded and  $u$  can grow at large

---

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Via Cintia, Complesso Monte S. Angelo, 80126 Napoli, (e-mail: rionero@unina.it; perrfran@matna2.dma.unina.it).

spatial distances or does not belong to some  $L^p(\Omega)$  - there are only few authors who have investigated equations (1) (we recall here the papers [7]-[9] and the references therein).

In the present paper we consider the case  $\Omega = H = \text{half space } z \geq 0$ ,  $Oxyz$  being an orthogonal frame of reference. It is easily seen then that equation (1) - at least when  $F = F(u)$  is uniquely invertible - presents the loss of uniqueness and admits solutions growing at large spatial distances. In fact let us consider the system

$$\begin{cases} u_t = \Delta F(u), & (\mathbf{x}, t) \in H \times \mathbb{R}^+ \\ u(\mathbf{x}, t_0) = u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in H \\ u|_{z=0} = u_1 = \text{const.} \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

where  $F \in C^2(\mathbb{R})$  and  $u_0 \in C^2(\overline{H})$  are assigned functions.

The steady version of (2) - when  $F(u)$  is uniquely invertible - is equivalent to the Dirichlet problem for the Laplace equation

$$\begin{cases} \Delta F = 0, & \mathbf{x} \in H \\ F = F_1, & \mathbf{x} \in \partial H \end{cases} \quad (3)$$

with  $F_1 = F(u_1)$ . In fact, if  $u = \varphi(F)$  is the inverse of  $F = F(u)$  the solvability of (3) implies the solvability of

$$\begin{cases} \Delta F(U) = 0, & \mathbf{x} \in H \\ U|_{z=0} = u_1, & \mathbf{x} \in \partial H. \end{cases} \quad (4)$$

Problem (3) admits the infinite solutions

$$F = F_1 + \lambda z, \quad \lambda = \text{const.} \in \mathbb{R} \quad (5)$$

growing with  $z$  when  $\lambda \neq 0$ . Therefore (4) admits the infinite steady solutions<sup>2</sup>

$$U = \varphi(F_1 + \lambda z), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

---

<sup>2</sup>For the sake of concreteness let us consider the case  $\{F = e^{ku}, u_1 = a = \text{const.}\}$ . Then  $\varphi = \frac{1}{k} \log$  hence  $u = \frac{1}{k} \log(e^{ka} + \lambda z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Therefore the problem

$$\begin{cases} \Delta e^{ku} = 0, & z \geq 0 \\ u = a, & z = 0. \end{cases}$$

admits the infinite solutions  $u = \frac{1}{k} \log(e^{ka} + \lambda z)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Let us notice that, according to the meaning of  $u$ , not all the real value  $\lambda$  can be admissible.

Our aim is to establish conditions allowing to select - in the class of the steady states (6) - the pointwise stable ones. The paper is divided into six sections. In section 2 we deduce a general weighted energy relation allowing the perturbations to grow at large spatial distances. Successively in Section 3 - assuming that exists two positive constants  $m$  and  $m_1$ , such that

$$m \leq F'(u) \leq m_1, \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (7)$$

we obtain, under an integrability condition on the initial perturbation  $v_0$ , a non weighted energy relation allowing the perturbations to grow at least polinomially at large spatial distances. In Section 4 we substitute condition with the weaker

$$m \leq F'(U) \leq m_1 \quad (8)$$

and obtain a criterion of pointwise stability. Then we show (Section 5) that this criterion (although only sufficient) establishes a selection between the steady states such a way that the initial data select the pointwise stable steady state. In Section 6, we apply the result obtained to the diffusion in a porous half space and to the horizontal filtration.

## 2. A weighted energy relation

Let  $U$  denote a solution of (4) in  $H$ . On setting

$$u = U + v$$

and

$$L(U, v) = F(U + v) - F(U) \quad (9)$$

we obtain the i.b.v.p. for the perturbation  $v$  to the basic state  $U$

$$\begin{cases} v_t = \Delta L, & (\mathbf{x}, t) \in H \times \mathbb{R}^+ \\ v(\mathbf{x}, t_0) = v_0, & \mathbf{x} \in H \\ v = 0, & \mathbf{x} \in \partial H. \end{cases} \quad (10)$$

We set

$$\begin{cases} G_n(U, v) = \int_0^v L^{2n+1}(U, \bar{v}) d\bar{v}, & n = 0, 1, 2, \dots \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (11)$$

and introduce the weight function

$$w(r, z) : w \geq 0, w \in C^2(H), \lim_{(r+z) \rightarrow \infty} (w + |\nabla w| + |\Delta w|) = 0 \quad (12)$$

and the weighted functional spaces

$$I_w : \varphi \in I_w \rightarrow w\varphi^2 \in L(H) \quad (13)$$

$$P_w : \varphi \in P_w \text{ implies } \begin{cases} \lim_{(r+z) \rightarrow \infty} [wL^{2n+1}|\nabla L| + L^{2n+2}|\nabla w|] = 0 \\ L^{\frac{2n+1}{2}} \in I_{\Delta w}, \quad (\nabla L^{n+1}) \in I_w \quad \forall t \geq t_0. \end{cases} \quad (14)$$

**Remark 1** - Let us notice that, because of (12), the function  $\varphi$  belonging to  $I_w$  or  $P_w$  can also grow (suitable) at large spatial distances.

**Definition 1** - Let  $\mathfrak{S}_w$  be the subspace of  $P_w$  such that  $\varphi \in P_w$  implies  $(\forall t > t_0)$

$$\dot{V}_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1)} \int_H L^{2n+2} \Delta w dx - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \int_H w(\nabla L^{n+1})^2 dx. \quad (15)$$

We call  $\mathfrak{S}_w$  the space of the strong solutions of order  $n$  of (10) related to  $w$ .

**Theorem 1** - Let  $v \in P_w$  be a smooth solution of (10). Then  $v \in \mathfrak{S}_w$

**Proof.** Along the solutions of (10) it turns out that

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \int_H wv_t L^{2n+1} dx = \int_H wL^{2n+1} \Delta L dx = \int_H wL^{2n+1} \nabla \cdot (\nabla L) dx = \\ &= \int_H \nabla \cdot [wL^{2n+1} \cdot \nabla L] - \nabla(wL^{2n+1}) \cdot \nabla L dx. \end{aligned}$$

But  $v = 0 \Rightarrow L = 0$ , therefore in view of (14)<sub>1</sub> – (14)<sub>2</sub> we obtain

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \int_H \nabla w L^{2n+1} \cdot \nabla L dx - (2n+1) \int_H wL^{2n} (\nabla L)^2 dx = \\ &= - \frac{1}{2n+2} \int_H \nabla w \cdot \nabla L^{2n+2} dx - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \int_H w(\nabla L^{n+1})^2 dx = \quad (16) \\ &= - \frac{1}{2n+2} \int_H \nabla \cdot [L^{2n+2} \nabla w] dx + \frac{1}{2n+2} \int_H L^{2n+2} \Delta w dx - \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \\ &\int_H w(\nabla L^{n+1})^2 dx = \frac{1}{2n+2} \int_H L^{2n+2} \Delta w dx - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \int_H w(\nabla L^{n+1})^2 dx. \end{aligned}$$



### 3. A non-weighted energy relation

We begin by recalling a Lemma whose proof can be found in [6] and [7]

**Lemma 1** - *Let*

$$m \leq F'(u) \leq m_1 \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (17)$$

*with  $m, m_1, t_0$  and  $T(> t_0)$  positive constants. Then it follows that*

$$G_n < vL^{2n+1} \quad (18)$$

$$2(n+1)m_1G_n \geq L^{2n+2} \geq mG_n \quad (19)$$

$$G_n \geq \frac{m^{2n+1}}{2(n+1)}v^{2(n+1)} \quad (20)$$

**Theorem 2** - *Let (17) hold and let*

$$w = g = e^{-\alpha(r+z)} \quad (21)$$

*$\alpha$  being a positive constant. Then, setting  $v_0(x) = v(x, t_0)$ , it turns out that*

$$\begin{cases} v \in \mathfrak{S}_g \\ G_n(U, v_0) \in I_g \end{cases} \quad (22)$$

*imply*

$$E_n(t) + \frac{2n+1}{(n+1)^2} \int_{t_0}^t d\tau \int_H (\nabla L^{n+1})^2 dx \leq E_n(t_0) \quad (23)$$

*with*

$$\begin{cases} E_n(t) = \int_H G_n(v, U) dx \\ E_n(t_0) = \int_H G_n(v_0, U) dx. \end{cases} \quad (24)$$

**Proof.** First of all let us notice that (17)-(21) imply that  $G_n$  and  $V_n$  are positive definite functionals of  $v$ . In view of (21), we obtain

$$\Delta g \leq 2\alpha^2 g \quad (25)$$

therefore (15) and (19) imply

$$\dot{V}_n(t) \leq 2\alpha^2 m_1 V_n(t) - \frac{2n+1}{(n+1)^2} \int_H g(\nabla L^{(n+1)})^2 dx \quad (26)$$

and the application of Gronwall's Lemma gives  $\forall t \in [t_0, T]$ ,

$$V_n(t) + \frac{(2n+1)}{(n+1)^2} \int_{t_0}^t e^{2\alpha^2 m_1(t-\tau)} d\tau \int_H g(\nabla L^{n+1})^2 dx \leq e^{2\alpha^2 m_1 t} V_n(U, v_0). \quad (27)$$

Letting  $\alpha \rightarrow 0$ , the right hand side - in view of (22<sub>2</sub>) - converges to  $E_n(t_0)$ , hence the monotone convergence theorem implies (23).

#### 4. Pointwise stability

**Theorem 3** - *Let the assumptions of Theorem 2 hold. Then*

$$\sup_H |v(x, t)| \leq \frac{1}{m} |\sup_H L(v_0)|, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (28)$$

**Proof.** In view of (20), (23) leads to

$$\int_H v^{2(n+1)} dx \leq \frac{2(n+1)}{m^{2n+1}} E_n(t_0), \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (29)$$

and (19) infers

$$\int_H v^{2(n+1)} dx \leq \frac{2(n+1)}{m^{2n+1}} \int_H L^{2n+2}(v_0) dx, \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (30)$$

then it follows that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_H v^{2(n+1)} dx \right)^{\frac{1}{2(n+1)}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[2(n+1)]^{\frac{1}{2(n+1)}}}{m^{\frac{2n+1}{2n+2}}} \left( \int_H L^{2n+2}(t_0) dx \right)^{\frac{1}{2n+2}}$$

i.e.

$$\sup_H |v(x, t)| \leq \frac{1}{m} \sup_H |L(v_0)|, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (31)$$

In view of  $F \in C^2(\mathbb{R})$  and  $L(v=0) = 0$ , it turns out that  $\sup |v_0| \rightarrow 0$  implies  $\sup_H |v(x, t)| \rightarrow 0, \quad \forall t \in [t_0, T]$ .

**Theorem 4** - Let  $F \in C^2(\mathbb{R})$ , and (22) hold and

$$\begin{cases} U_1 = \inf_H U(x) > -\infty \\ U_2 = \sup_H U(x) < \infty \\ m_1 \geq F'(U(x)) \geq 2m \text{ a.e. in } H \end{cases} \quad (32)$$

$m$  and  $m_1$  being positive constants. Then  $U$  is stable in the pointwise norm.

**Proof.** Following the guidelines of theorem 4 of [], we notice that  $F'$  is uniformly continuous on any subset  $[a, b]$  with  $\{a = \text{const.} < U_1, b = \text{const.} > U_2\}$ . Therefore

$$\forall \eta > 0, \exists \epsilon(\eta) > 0 : |U'' - U'| < \epsilon$$

implies

$$F'(U') - \eta \leq F'(U'') \leq F'(U') + \eta; \quad U', U'' \in [a, b] \quad (33)$$

Therefore on choosing

$$U' = U(x), \quad m = \eta$$

and setting

$$U'' = U + v$$

it turns out there exists a positive constant  $\epsilon$  such that

$$|v| < \epsilon \Rightarrow 2m - m \leq F'[U(x) + v] \leq m_1 + m$$

i.e.

$$|v| < \epsilon \Rightarrow m \leq F'[U(x) + v] \leq m^* \quad (34)$$

with

$$m^* = m_1 + m. \quad (35)$$

Assume now - by contradiction - that  $U$  is unstable in the pointwise norm. Then there exists a  $v(x, t)$  and a  $\bar{t}(> t_0)$  such that

$$\begin{cases} \sup_H |v(x, t_0)| < \frac{\epsilon}{2} - \frac{m}{m^*} \\ \sup_H |v(x, \bar{t})| = \epsilon \\ \sup_H |v(x, t)| < \epsilon \quad t \in [t_0, \bar{t}] \end{cases} \quad (36)$$

In view of (36<sub>3</sub>) and (34), (28) implies

$$\sup_H |v(x, t)| \leq \sup_H |v(x, t_0)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]$$

hence in contradiction with (36<sub>2</sub>) it follows that

$$\sup_H |v(x, \bar{t})| = \lim_{t \rightarrow \bar{t}-0} \sup |v(x, t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

## 5. On the selection of the steady stable solution

Although theorem 4 gives only conditions sufficient for the stability, it appears of interest to notice that it works as a selection criterion in the set of the steady states. Precisely, between two steady states verifying (32<sub>3</sub>), the initial data selects the stable one. For the sake of simplicity let us assume that

$$\bar{U} = \varphi(F_1)$$

is stable. From (6), for any other steady solution  $U$ , it follows that

$$U = \bar{U} + \lambda z \left( \frac{d\varphi}{dF} \right)_{F_1 + \theta \lambda z} \quad 0 < \theta < 1$$

$$u = U + v = \bar{U} + v + \lambda z \left( \frac{d\varphi}{dF} \right)_{F_1 + \theta \lambda z}$$

i.e.

$$\begin{cases} u = \bar{U} + v_1 \\ v_1 = v + \lambda z \left( \frac{d\varphi}{dF} \right)_{F_1 + \theta \lambda z} \end{cases}$$

Therefore

$$\begin{aligned} G_n(U, v) &= G(\bar{U}, v_1) = \int_0^{v_1} L^{2n+1}(\bar{U}, \bar{v}) d\bar{v} = \\ &= \int_0^v L^{2n+1}(\bar{U}, \bar{v}) d\bar{v} + \int_v^{v_1} L^{2n+1}(\bar{U}, \bar{v}) d\bar{v}. \end{aligned}$$

In the case  $v > 0$ , (18) and (20) imply

$$L^{2n+1} > \frac{G_n}{v} \geq \frac{m^{2n+1}}{2n+2} v^{2n+1}$$

and hence

$$\begin{aligned} \int_v^{v_1} L^{2n+1}(\bar{U}, \bar{v}) d\bar{v} &\geq m^{2n+1} \left[ \bar{v}^{2n+2} \right]_v^{v_1} = \\ &= v_1^{2n+2} - v^{2n+2} \geq \left( \frac{d\varphi}{dF} \right)_{F_1 + \theta \lambda z}^{2(n+1)} \lambda^{2(n+1)} z^{2(n+1)}. \end{aligned} \quad (37)$$

In view of (32), it follows that

$$\frac{d\varphi}{dF} \geq \frac{1}{m^*}$$

and (37) infers

$$\int_v^{v_1} L^{2n+1}(\bar{U}, \bar{v}) d\bar{v} \geq \left( \frac{\lambda}{m^*} \right)^{2(n+1)} z^{2(n+1)}. \quad (38)$$

Therefore if

$$G_n(\bar{U}, v_0) \in L^1(H),$$

theorem 4 guaranties the pointwise stability of  $\bar{U}$ . But, because (38) implies that  $G_n(U, v) \notin L^1(H)$ , theorem 4 cannot be applied to the steady state  $U$ .

## 6. Diffusion in a porous half space

Let us consider now the case

$$F = u^n, \quad (n > 1). \quad (39)$$

We recall that when (39) holds, (2) governs the diffusion of a gas of density  $u$  in a porous medium and is called the porous medium equation. In particular when (39) holds with  $n = 6$ , (2) governs the horizontal infiltration of moisture into a dry soil [11]. In view of (39), (3) become

$$\begin{cases} \Delta U^n = 0 & \mathbf{x} \in H \\ U^n = u_1^n & \mathbf{x} \in \partial H \end{cases} \quad (40)$$

and lead to the steady states

$$U = (u_1^n + \lambda z)^{\frac{1}{n}} \quad (41)$$

it is easily seen that only the solution

$$\bar{U} = u_1 \quad (42)$$

verifies the assumptions of theorem 4. In fact  $(32_1)$  -  $(32_2)$  are obviously satisfied. As concerns  $(32_3)$  it is

$$F'(\bar{U}) = nu_1^{n-1} = \text{const.} \quad (43)$$

and  $(32_3)$  is satisfied with  $m_1 = 2m = nu_1^{n-1}$ . It remains to verify  $(22_2)$ . But  $(20)$  immediately infers  $v_0^{2(n+1)} \in L(H) \Rightarrow G_n(\bar{U}, v_0) \in L(H)$ , guaranteing the pointwise stability of  $(42)$ .

## Bibliography

- [1] J. Smoller *Shock waves and reaction-diffusion equation*, Springer-Verlag, n.258 of "A Series of Comprehensive Studies in Mathematics", 1983.
- [2] F.K. Murray *Mathematical Biology*, Biomathematics Texte, Springer-Verlag, n. 19, 1989.
- [3] O.A. Ladyzenshaja and V.A. Solonnikov *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr. A.M.S., Providence Rhode Islands, n. 23, 1968.
- [4] J.N.Flavin and S.Rionero *Qualitative Estimates for Partial Differential Equation, An Introduction*, CRC Press, Boca Raton, FL, (1995).
- [5] S. Rionero *Continuum mechanics and applications in geophysics and environment*, Springer (Physics and Astronomy), eds. B. Straughan, R. Greve, H. Ehrentrant, Y. Wang, 2001. pp. 56-78.
- [6] J.N.Flavin and S.Rionero *Asymptotic and other properties of nonlinear diffusion model*, J.Math.Analysis.Appl. 228, 119-140, (1998).
- [7] I. Torcicollo, M. Vitiello *On nonlinear diffusion in the exterior of a sphere*, Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli LXVIII, (2001)
- [8] S. Rionero and G.P. Galdi *Ricerche Mat.* VXXX, 85 (1981)
- [9] R. Russo, and P. Maremonti *Ricerche Mat.*, 41, 11 (1993)
- [10] J. Flavin and S. Rionero *Stability propeties for nonlinear diffusion in porous and other media*, (to appear)
- [11] A. B. Taylor *Mathematical models in applied Mechanics*, Clarendon Press - Oxford (1986)

**Acknowledges** - Work performed under the auspices of G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (COFIN 2000): "Nonlinear mathematical problems of wave propagation and stability in continuous media".





## **Alcune osservazioni su una disequazione variazionale del quarto ordine**

Nota di F. Acanfora\* e M. Squillante\*\*

Presentata dal Socio Luciano Carbone  
(Adunanza del 15 novembre 2002)

**Riassunto** – In quest'articolo studiamo la regolarità della soluzione di una disuguaglianza variazionale del quarto ordine utilizzando una tecnica introdotta da Frehse in [4].

**Abstract** – In this paper we study the regularity of solution of a variational inequality of the fourth order using a technique introduced by Frehse in [4].

---

\* Seconda Università di Napoli - Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione - Via Roma, 29 - 81031 Aversa (CE).

\*\* Università degli Studi del Sannio - Dipartimento di Analisi dei Sistemi Economici e Sociali - Via delle Puglie - 82100 Benevento. Email: squillan@unisannio.it

## 1. Introduzione

Il problema della regolarità della soluzione di una disequazione variazionale del quarto ordine è stato studiato da Frehse in [4], dove si dimostra che la soluzione del problema di minimo:

$$\inf_{u \in K} \int_{\Omega} \left[ (\Delta u)^2 - \sum f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] dx,$$

dove  $f_i(x) \in L^\infty(\Omega)$  e  $K = \{v \in H_0^2(\Omega) : v \geq \psi \text{ in } \Omega\}$ , con  $\psi(x) \in H^{3,\infty}(\Omega)$ , ha le derivate seconde limitate in  $\Omega$ .

Successivamente in [2] Caffarelli e Friedman hanno ritrovato tale risultato limitatamente al caso del funzionale:

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx,$$

con l'ipotesi  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$  e dimostrato la continuità delle derivate seconde nell'ipotesi che  $\Omega$  sia un aperto di  $\mathbf{R}^2$ .

Scopo di questa nota è mostrare come, adoperando la tecnica usata da Frehse in [4], si possa studiare la regolarità della soluzione di un problema del tipo:

$$\inf_{u \in K} \int_{\Omega} \left[ a(x) (\Delta u)^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + c(x) \cdot u^2 \right] dx,$$

con  $K = \{v \in H_0^2(\Omega) : v \geq \psi \text{ in } \Omega\}$ ,  $a(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $a(x) > a_0 > 0$ ,  $b_i(x)$  e  $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\psi(x) \in H^{3,\infty}(\Omega)$ .

## 2. Notazioni e richiami

Detto  $\Omega$  un aperto di  $\mathbf{R}^n$ , denoteremo con  $L_{loc}^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , lo spazio vettoriale delle funzioni reali di potenza  $p$  integrabile su ogni sottinsieme compatto di  $\Omega$ ; con  $L_{loc}^\infty(\Omega)$  lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate su ogni compatto di  $\Omega$ ; con  $C^k(\overline{\Omega})$  lo spazio delle funzioni dotate di derivate fino all'ordine  $k$ , continue in  $\overline{\Omega}$ ; con  $H_0^{m,p}(\Omega)$  la chiusura di  $C_0^\infty(\Omega)$  nello spazio  $H^{m,p}(\Omega)$ , rispetto alla norma  $\|u\|_{m,p} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ .

Adoperando le notazioni di [4] porremo poi nel seguito:

$$|\zeta|_l^r = \begin{cases} |\zeta|^{r-l} \zeta, & \text{se } |\zeta| \leq l \\ |l|^r \text{sign } \zeta, & \text{se } |\zeta| > l \end{cases}, \quad \forall l > 0, \forall \zeta \in \mathbf{R} \text{ e } \forall r \geq 1,$$

$$\begin{aligned} \delta_{ih} Z(x) &= h^{-2} [Z(x + h\mathbf{e}_i) - 2Z(x) + Z(x - h\mathbf{e}_i)], \quad h > 0, \\ \Delta_h Z(x) &= \sum_i \delta_{ih} Z(x) \end{aligned}$$

essendo  $e_i$  il versore dell'asse  $x_i$ .

Richiamiamo il seguente lemma (cfr. [4]) :

**Lemma 2.1.** *Se  $u \in K$ ,  $\phi \in H^{1,\infty}(\Omega)$  ed è a supporto compatto in  $\Omega$  risultando  $0 \leq \phi \leq 1$ , allora, comunque si fissino  $r \geq l$ ,  $l > 0$  e  $0 < h < \frac{1}{2} \text{dist}(\partial\Omega, \text{supp } \phi)$ , esistono un numero positivo  $\varepsilon_0$  ed una successione  $(t_k)_k \subseteq H^{2,2}(\Omega)$  di funzioni a supporto compatto in  $\Omega$  tali che  $u + t_k \in K$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $t_k$  converge ad  $\varepsilon_0 \phi [\Delta_h(u - \psi)]_l^r$  in  $H^{1,2}(\Omega)$ .  $\square$*

### 3. Esistenza del minimo

Detti  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\alpha$  un numero reale maggiore di 1,  $G(x, u, p)$  una funzione reale definita in  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , misurabile rispetto a  $x$  per tutti i valori di  $u$  e  $p$  e continua rispetto a  $(u, p)$  per quasi tutti i valori di  $x$ , consideriamo il funzionale:

$$I(u) = \int_{\Omega} [a(x) |\Delta u|^{\alpha} + G(x, u, p)] dx \quad (3.1)$$

sul quale faremo le seguenti ipotesi:

$$\begin{aligned} a(x) &\in L^{\infty}(\Omega), \quad \inf a(x) = a_0 > 0 \\ G(x, u, p) &\geq -q|p|^{\alpha} - Q_1(x)|p|^{\beta} - Q_2(x)|u|^{\delta} - R(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

con  $\alpha > \beta$ ,  $Q_1(x) \in L^{\gamma}(\Omega)$  con  $\frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{n}$ ,  $Q_2(x) \in L^{\bar{\gamma}}(\Omega)$  con  $\frac{1}{\bar{\gamma}} = 1 - \frac{\delta}{\alpha} + 2\frac{\delta}{n}$ ,  $R(x) \in L^1(\Omega)$ .

Posto

$$\Lambda(\alpha, \Omega) = \inf_{u \in H_0^{2,\alpha}(\Omega)} \frac{\int |\Delta u|^{\alpha}}{|Du|^{\alpha}} \geq \frac{1}{S_{\alpha}^{\alpha} |\Omega|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \quad u \in H_0^{2,\alpha}(\Omega) \quad (3.3)$$

dove  $S_{\alpha}$  è la costante di Sobolev e  $\frac{1}{\alpha^*} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n}$ , osserviamo che, grazie a una classica caratterizzazione variazionale degli autovalori,  $\Lambda(2, \Omega)$  coincide con il primo autovalore del problema al contorno:

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda \Delta u = 0, \\ u \in H_0^2(\Omega). \end{cases}$$

Sussiste il seguente teorema che estende un risultato di Stampacchia (cfr. [7]) e che assicura la compattezza debole in  $H_0^{2,\alpha}(\Omega)$  di una successione minimizzante il funzionale (3.1):

**Teorema 3.1.** *Se le funzioni  $a(x)$  e  $G(x, u, p)$  verificano le ipotesi (3.2) e  $q < a_0 \Lambda(\alpha, \Omega)$ , detta  $\bar{u} \in H_0^{2,\alpha}(\Omega)$  per cui  $I(\bar{u}) < +\infty$ , esiste una costante  $T$  dipendente da  $\alpha, \beta, \delta, q, \|Q_1\|_{L^{\gamma}(\Omega)}, \|Q_2\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)}, \|R\|_{L^1(\Omega)}, \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}$  e  $I(\bar{u})$  tale che, per ogni  $u \in H_0^{2,\alpha}(\Omega)$  per cui si abbia  $I(u) \leq I(\bar{u})$  risulta*

$$\|u\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)} \leq T.$$

**Dimostrazione.** Da (3.2) si ricava:

$$\int_{\Omega} a(x) |\Delta u|^{\alpha} dx - q \int_{\Omega} |\nabla u|^{\alpha} dx - \int_{\Omega} Q_1(x) |\nabla u|^{\beta} dx - \int_{\Omega} Q_2(x) |u|^{\delta} dx \leq \quad (3.4)$$

$$\leq I(\bar{u}) + \|R(x)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Per la posizione (3.3) si ha:

$$\|\nabla u - \nabla \bar{u}\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} \leq \frac{1}{\Lambda(\alpha, \Omega)} \|\Delta u - \Delta \bar{u}\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha}$$

e per una nota disuguaglianza

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{\alpha} dx \leq \frac{(1+\varepsilon)^{\alpha}}{\Lambda(\alpha, \Omega)} \int_{\Omega} |\Delta u|^{\alpha} dx + L(\varepsilon) \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}^{\alpha}.$$

Essendo:

$$\|\nabla u - \nabla \bar{u}\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)} \leq S_{\alpha} \|\Delta u - \Delta \bar{u}\|_{L^{\alpha}(\Omega)},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)} &\leq \|\nabla u - \nabla \bar{u}\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)} + \|\nabla \bar{u}\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)} \leq \\ &\leq S_{\alpha} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)} + K \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Da  $Q_1(x) \in L^{\gamma}(\Omega)$  consegue poi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Q_1(x) |\nabla u|^{\beta} dx &\leq \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)}^{\beta} \leq \\ &\leq \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)} \left( S_{\alpha} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)} + K \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)} \right)^{\beta} \leq \\ &\leq \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)} 2^{\beta} S_{\alpha}^{\beta} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\beta} + 2^{\beta} K^{\beta} \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}^{\beta} \leq \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} + L'(\varepsilon) \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} + \\ &\quad + \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)} 2^{\beta} c^{\beta} \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}^{\beta}. \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Q_2(x) |u|^{\delta} dx &\leq \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)} \|u\|_{L^{\alpha^*}(\Omega)}^{\delta} \leq \\ &\leq \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)} \left( \bar{S}_{\alpha} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)} + h \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)} \right)^{\delta} \leq \\ &\leq 2^{\delta} \bar{S}_{\alpha}^{\delta} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\delta} + 2^{\delta} h^{\delta} \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}^{\delta} \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)}^{\delta} \leq \\ &\leq \frac{\delta}{\alpha} 2^{\frac{\alpha}{\delta}} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} + L''(\varepsilon) \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)}^{\frac{\alpha}{\alpha-\delta}} + \\ &\quad + \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)} 2^{\delta} h^{\delta} \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}^{\delta}, \end{aligned}$$

dove  $\alpha^* = \frac{n\alpha}{n-2\alpha}$ .

Dalla (3.4), grazie alle stime ottenute si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x) |\Delta u|^{\alpha} dx - q \frac{(1+\varepsilon)^{\alpha}}{\Lambda(\alpha, \Omega)} \int_{\Omega} |\Delta u|^{\alpha} dx - q L(\varepsilon) \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)} + \\ & + \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} - L'(\varepsilon) \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} - \|Q_1(x)\|_{L^{\gamma}(\Omega)} 2^{\beta} c^{\beta} \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)}^{\beta} + \\ & - \frac{\delta}{\alpha} \varepsilon^{\frac{\alpha}{\delta}} \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} - L''(\varepsilon) \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)}^{\frac{\alpha}{\alpha-\delta}} + 2^{\delta} h^{\delta} \|\bar{u}\|_{H_0^{2,\alpha}(\Omega)} \|Q_2(x)\|_{L^{\bar{\gamma}}(\Omega)} \leq \\ & \leq I(\bar{u}) + \|R(x)\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Si ha quindi:

$$\left( a_0 - q \frac{(1+\varepsilon)^{\alpha}}{\Lambda(\alpha, \Omega)} - \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon^{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\delta}{\alpha} \varepsilon^{\frac{\alpha}{\delta}} \right) \|\Delta u\|_{L^{\alpha}(\Omega)}^{\alpha} \leq \text{cost.},$$

da cui, essendo  $q < a_0 \Lambda(\alpha, \Omega)$  e grazie all'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , segue il teorema.  $\square$

#### 4. Regolarità della soluzione

Dimostriamo il seguente teorema di regolarità:

**Teorema 4.1.** *Se  $u$  è soluzione del problema variazionale:*

$$\inf_{v \in K} \int_{\Omega} \left[ a(x) (\Delta v)^2 + \sum_{i=1}^n b_i(x) (\partial_i u)^2 + c(x) \cdot v^2 \right] dx$$

*nell'ipotesi che  $a(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ ,  $a(x) > a_0 > 0$ ,  $b_i(x)$  e  $c(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ ,  $\psi(x) \in H^{3,\infty}(\Omega)$  si ha:*

$$\Delta u \in L_{loc}^{\infty}(\Omega).$$

**Dimostrazione.** Iniziamo con l'osservare che  $u$  è soluzione della disequazione variazionale:

$$\int_{\Omega} \left[ a(x) \Delta u \Delta (v-u) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u \partial_i (v-u) + c(x) \cdot u(v-u) \right] dx \geq 0, \forall v \in K. \quad (4.1)$$

Posto allora nella (4.1)  $v = t_k + u$ , essendo  $t_k$  una successione di funzioni la cui esistenza è garantita dal lemma 2.1, si ha:

$$\int_{\Omega} a(x) \Delta u \Delta t_k \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u \partial_i t_k + \int_{\Omega} c(x) u t_k dx.$$

Un noto teorema di Frehse (cfr. [3]) assicura che nelle ipotesi di regolarità fatte sulle funzioni  $a(x)$ ,  $b_i(x)$ ,  $c(x)$  e  $\psi(x)$  la soluzione  $u$  appartiene ad  $H_{loc}^{3,2}(\Omega)$ ; quindi, integrando per parti e tenendo presente che le  $t_k$  sono a supporto compatto in  $\Omega$ , si ha:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i (a(x) \Delta u) \partial_i t_k \leq \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u \partial_i t_k + c(x) u t_k \right] dx,$$

da cui passando al limite per  $k \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i (a(x) \Delta u) \partial_i (\phi [\Delta_h(u - \psi)]_l^r) dx &\leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u \partial_i (\phi [\Delta_h(u - \psi)]_l^r) + c(x) u (\phi [\Delta_h(u - \psi)]_l^r) \right) dx \end{aligned}$$

e passando al limite per  $h \rightarrow 0$ :

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i (a(x) \Delta u) \partial_i (\phi [Z]_l^r) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u \partial_i (\phi [Z]_l^r) + \int_{\Omega} c(x) u (\phi [Z]_l^r) dx,$$

essendo  $Z = \Delta u - \Delta \psi$ .

Posto allora:

$$W_i(x) = b_i(x) \partial_i u - \partial_i (a(x) \Delta \psi),$$

si ha:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \partial_i (a(x) z) \partial_i (\phi [Z]_l^r) dx \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_i(x) \partial_i (\phi [Z]_l^r) + \int_{\Omega} c(x) u (\phi [Z]_l^r) dx.$$

Per  $\phi = \tau^2$ , con  $\tau$  a supporto compatto e  $0 \leq \tau \leq 1$ , si ha:

$$\begin{aligned} &2 \int_{\Omega} \partial_i a \cdot Z \cdot \tau \cdot \partial_i \tau [Z]_l^r dx + \tau \int_{\Omega} \partial_i a \cdot \tau^2 \cdot Z \cdot \partial_i Z \cdot [Z]_l^{r-1} dx + \\ &+ 2 \int_{\Omega} a(x) \cdot \tau \cdot \partial_i \tau \cdot \partial_i Z \cdot [Z]_l^r dx + \tau \int_{\Omega} a(x) \tau^2 (\partial_i Z)^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} 2W_i(x) \cdot \tau \cdot \partial_i \tau [Z]_l^r dx + \tau \int_{\Omega} W_i(x) \tau^2 \partial_i Z \cdot [Z]_l^{r-1} dx + \\ &+ \int_{\Omega} c(x) u \tau^2 [Z]_l^{r-1} dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Valgono le seguenti maggiorazioni:

$$\begin{aligned}
 2 \left| \int_{\Omega} \partial_i a \cdot Z \cdot \tau \cdot \partial_i \tau [Z]_l^r dx \right| &\leq \int_{\star} \tau^2 |Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx + \|\nabla a\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 \|\nabla \tau\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\star} [Z]_l^{r+1} dx; \\
 \left| r \int_{\Omega} \partial_i a \cdot \tau^2 \cdot Z \cdot \partial_i Z \cdot [Z]_l^{r-1} dx \right| &\leq r r_l \int_{\star} \tau^2 \cdot |Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx + \\
 &\quad + \frac{r}{r_l} \|\nabla a\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 \int_l \tau^2 \cdot |\nabla Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx; \\
 \left| 2 \int_{\Omega} a(x) \cdot \tau \cdot \partial_i \tau \cdot \partial_i Z \cdot [Z]_l^r dx \right| &\leq \frac{1}{4} r \int_l \tau^2 \cdot |\nabla Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx + \frac{4}{r} \|a\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 \|\nabla \tau\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\star} [Z]_l^{r-1} dx; \\
 r \int_{\Omega} W_i(x) \tau^2 \partial_i Z \cdot [Z]_l^{r-1} dx &\leq \frac{1}{4} r \int_l \tau^2 \cdot |\nabla Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx + 4r \int_{\star} |W_i|^2 [Z]_l^{r-1} dx; \\
 2 \int_{\Omega} W_i(x) \cdot \tau \cdot \partial_i \tau [Z]_l^r dx &\leq \|\nabla \tau\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_{\star} [Z]_l^{r+1} dx + r \int_{\star} |W_i|^2 [Z]_l^{r-1} dx; \\
 \int_{\Omega} c(x) u \tau^2 [Z]_l^r dx &\leq \int_{\star} (c(x) u)^2 [Z]_l^{r-1} dx + \int_{\star} [Z]_l^{r+1} dx;
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

nelle (4.3) abbiamo denotato con  $\int_{\star}$  e  $\int_l$  rispettivamente l'integrale esteso a  $\text{supp } \tau$  e l'integrale esteso all'insieme in cui  $|Z| \leq l$ .

Dalla disuguaglianza (4.2) e dalle maggiorazioni (4.3) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \left( r \min a(x) - \frac{r}{r_l} - \frac{l}{2} r \right) \int_l \tau^2 \cdot |\nabla Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx &\leq \\
 &\leq \left[ \|\nabla a\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 \|\nabla \tau\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + \frac{4}{r} \|a\|_{C^0(\bar{\Omega})}^2 \|\nabla \tau\|_{L^\infty(\Omega)}^2 + 1 \right] \int_{\star} [Z]_l^{r+1} dx + \\
 &\quad + 5r \int_{\star} |W_i|^2 [Z]_l^{r-1} dx + \int_{\star} (c(x) u)^2 [Z]_l^{r-1} dx + (l + r_l) \int_{\star} \tau^2 [Z]_l^{r+1} dx.
 \end{aligned}$$

Per  $r_2$  abbastanza grande dalla relazione precedente si ottiene una maggiorazione del tipo:

$$\int_l \tau^2 \cdot |\nabla Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-1} dx \leq C_1 \int_{\star} [Z]_l^{r+1} dx + C_2 \int_{\star} \sum_i |W_i|^2 [Z]_l^{r-1} dx + C_3 \int_{\star} (c(x) u)^2 [Z]_l^{r-1} dx,$$

dove le costanti  $C_1, C_2, C_3$  dipendono da  $r$ , da  $a(x)$  e da  $\tau$ .

Osserviamo che dalla disuguaglianza di Sobolev si ha:

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{\Omega} (\tau^2 [Z]_l^{r-1})^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} &\leq S \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \tau [Z]_l^{\frac{r}{2}} \right) \right|^2 dx \leq \\
 &\leq S \left( \frac{r}{2} \right)^2 \int_l \tau^2 \cdot |\nabla Z|^2 \cdot [Z]_l^{r-2} dx + S \int_{\star} |\nabla \tau|^2 [Z]_l^r dx,
 \end{aligned}$$

essendo  $\sigma = \frac{n}{n-2}$ ; di qui, applicando la (4.3) con  $r-1$  al posto di  $r$ , otteniamo:

$$\left( \int_{\Omega} (\tau^2 [Z]_l^{r-1})^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \bar{C}_1 \int_{\Omega} [Z]_l^r dx + \bar{C}_2 \int_{\Omega} \sum_i |W_i|^2 [Z]_l^{r-2} dx + \quad (4.4)$$

$$+ \bar{C}_3 \int_{\Omega} (c(x)u)^2 [Z]_l^{r-2} dx.$$

Fissato ora  $R > 0$  tale che  $B_{2R}(x_0) \subset \subset \Omega$ , indichiamo con  $B_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , la sfera di centro  $x_0$  e raggio:

$$\left( 2 - (\sigma - 1) \sum_{k=1}^j \sigma^{-k} \right) \cdot R$$

ed osserviamo che  $\partial B_j \rightarrow \partial B_R$  per  $j \rightarrow +\infty$ .

Indichiamo con  $\tau_j(x)$  una successione di funzioni di  $H^{1,\infty}(\Omega)$  tale che:

$$\begin{aligned} \text{supp } \tau_j(x) &\subseteq B_j, \\ \tau_j(x) &= 1 \text{ su } B_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Per  $\tau = \tau_j$  dalla (4.4) si ha:

$$\left( \int_{B_{j+1}} [Z]_l^{r\sigma} dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \bar{C}_1 \int_{B_j} [Z]_l^r dx + \bar{C}_2 \int_{B_j} \sum_i |W_i|^2 [Z]_l^{r-2} dx + \quad (4.5)$$

$$+ \bar{C}_3 \int_{B_j} (c(x)u)^2 [Z]_l^{r-2} dx.$$

Tenendo ora presente che, grazie al fatto che  $u \in H_{loc}^{3,2}(\Omega)$  (cfr. [3]), per il teorema di Sobolev  $Z \in L^{2\sigma}(B_1)$  e  $W_i \in L^{\frac{2n}{n-4}}(B_1)$ , dalla (4.5) si ricava, applicando la disuguaglianza di Hölder:

$$\left( \int_{B_2} [Z]_l^{r\sigma} dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \bar{C}_1 \int_{B_1} [Z]_l^r dx + \bar{C}_2 \|W_i\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(B_1)}^2 \left( \int_{B_1} [Z]_l^{\frac{3}{4}(r-2)} dx \right)^{\frac{4}{n}} +$$

$$+ \bar{C}_3 \|c(x)u\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(B_1)}^2 \left( \int_{B_1} [Z]_l^{\frac{3}{4}(r-2)} dx \right)^{\frac{4}{n}}.$$

Ponendo nell'ultima disuguaglianza  $r = 2\sigma$  e passando al limite per  $l \rightarrow \infty$  si ottiene  $Z \in L^{2\sigma^2}(B_2)$ .

Procediamo ora per induzione supponendo  $Z \in L^{2\sigma^k}(B_k)$  e mostriamo che  $Z \in L^{2\sigma^{k+1}}(B_{k+1})$ .

Da  $Z \in L^{2\sigma^k}(B_k)$  consegue per il teorema di immersione di Sobolev che  $W_i(x) \in L^{\frac{2n\sigma^k}{(n-2)\sigma^k}}(B_k)$ . Posto  $p_k = \frac{n\sigma^k}{(n-2)\sigma^k}$  e  $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ , applicando la (4.5) con  $j = k+2$  e la



disuguaglianza di Hölder con gli esponenti  $p_k$  e  $q_k$ , si ha:

$$\left( \int_{B_{k+3}} |Z|_l^{r\sigma} dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \overline{C}_1 \int_{B_{k+2}} |Z|_l^r dx + \overline{C}_2 \|W_i\|_{L^{p_k}(B_{k+2})}^2 \left( \int_{B_{k+2}} |Z|_l^{q_k(r-2)} dx \right)^{\frac{1}{q_k}} \quad (4.6) \\ + \overline{C}_3 \|c(x)u\|_{L^{p_k}(B_{k+2})}^2 \left( \int_{B_{k+2}} |Z|_l^{q_k(r-2)} dx \right)^{\frac{1}{q_k}}.$$

Poichè risulta:

$$q_k(r-2) = \frac{n\sigma^k}{(n+2)\sigma^k - n} (r-2) \leq 2\sigma^k \quad \text{per } r = 2\sigma^k,$$

scrivendo la (4.6) con tale valore per  $r$  e passando al limite per  $l \rightarrow \infty$ , si ottiene:

$$Z \in L^{2\sigma^{k+1}}(B_{k+1}).$$

Possiamo dunque concludere che  $Z \in L^p(B_r)$ , per ogni  $p \geq 1$ . Di conseguenza, per il teorema di immersione di Sobolev, le derivate prime della soluzione sono continue in  $\Omega$  e dunque è possibile applicare nuovamente alla disequazione variazionale (4.1) il procedimento di Moser utilizzato da Frehse in [4] ed ottenere  $\Delta u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ .  $\square$

## 5. Bibliografia

- [1] H.Brèzis, G.Stampacchia, *Remarks on some fourth order variational inequalities*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 4 (4) (1977), 363-371.
- [2] L.Caffarelli, A.Friedman, *The obstacle problem for the biharmonic operator*, Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, 5 (4) (1978), 215-228.
- [3] J.Frehse, *Zum Differenzierbarkeits problem bei variationsungleichungen hoherer Ordnung*, Hamburg Univ. Math. Sem., Abband. 36 (1971), 140-149.
- [4] J.Frehse, *On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality*, Man. Math. 9 (1973), 91-103.
- [5] D.Kinderlehrer, G.Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and applications*, Academic Press, 1980.
- [6] J.L. Lions, G.Stampacchia, *Variational Inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 493-519.
- [7] G.Stampacchia, *On some regular multiple integral problems in the Calculus of variations*, Comm. Pure Appl. Math. XVI (1963), 383-421.



## **L'epistolario Genocchi-Sella (1851-1883)**

### **Parte seconda: Il commento**

Nota di Luciano Carbone\*, Giuseppe Cardone\*\*, Luisa Faella\*

Presentata dal Socio Luciano Carbone  
(Adunanza del 15 novembre 2002)

**Riassunto** – Nella presente nota discutiamo i testi della corrispondenza epistolare tra il noto matematico Angelo Genocchi e il celebre scienziato e uomo politico Quintino Sella pubblicati in questa stessa rivista nel 2001. Tema centrale del commento è il tentativo di fusione tra l'Accademia Nazionale dei Lincei e la Società Italiana delle Scienze che ebbe luogo intorno al 1875, promosso da Sella e osteggiato da Genocchi.

**Abstract** – In this work we discuss the correspondence between Angelo Genocchi, the well known mathematician, and Quintino Sella, the celebrated statesman and scientist. The correspondence was published in this journal in 2001. The central theme of the comment is the attempt of fusion between Accademia Nazionale dei Lincei and Società Italiana delle Scienze which happened in 1875, promoted by Sella and opposed by Genocchi.

---

\* Università degli Studi di Napoli – Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" - Complesso Monte S. Angelo, Via Cintia, 80126 Napoli, Italy - email: carbone@biol.dgbm.unina.it, lufaella@unina.it.

\*\* Seconda Università di Napoli - Dipartimento di Ingegneria Civile - Via Roma, 29 - 81031 Aversa (CE), Italy - email: giuseppe.cardone@unina2.it.

## 1. INTRODUZIONE

In una nota precedente<sup>1</sup>, abbiamo edito i testi della corrispondenza epistolare intercorsa tra Angelo Genocchi e Quintino Sella; ad essa faremo nel seguito riferimento con la dizione *parte prima*. Nella nota presente intendiamo discutere alcune delle tematiche che emergono in tale scambio di lettere.

Gli argomenti in esso toccati sono numerosi ma quello che sembra maggiormente coinvolgere gli interlocutori riguarda le vicende dell'Accademia dei Lincei e la Società italiana delle Scienze, l'odierna Accademia Nazionale Italiana delle Scienze detta dei Quaranta.

In effetti le attività delle accademie costituiscono il loro comune punto di interesse e non manca qualche riferimento alla vita dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Due comunque sono gli avvenimenti su cui si concentra l'attenzione di Sella e Genocchi: il tentativo fallito di fusione avvenuto tra il 1874 e 1875 dell'Accademia dei Lincei con la Società italiana, promossa da Sella e osteggiata da Genocchi e la riforma statutaria dell'Accademia dei Lincei, riuscita, del 1883 voluta da Sella e non gradita da Genocchi.

In particolare il primo appare distesamente in ben dodici delle quarantatré lettere di cui consta l'epistolario; i toni sono talora accesi e Genocchi svolge un ruolo di oppositore assai attivo; il secondo compare in quattro lettere, ma questa volta il comportamento di Genocchi è assai meno attivo. Egli infatti si limita a commentare il nuovo statuto riproponendo in forma adattata alcune delle sue vecchie argomentazioni quasi a voler sottolineare la distanza delle posizioni a suo tempo manifestatesi. Spiegherà il suo atteggiamento nella lettera del 10 ottobre 1883 (*parte prima* p. 196) : “Vi ho esposto lealmente e schiettamente i miei concetti che forse vi parranno stramberie come a me sembrano alcune deliberazioni che veggo adottate.

Ma non avendo io contribuito finora ai lavori dell'Accademia, non sento il coraggio di farmi promotore di una posizione formale.”

---

<sup>1</sup> L. Carbone- G. Cardone- L. Faella, *L'epistolario Genocchi-Sella (1851-1883). Parte Prima: i testi*. Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli s. IV, v. LXVIII (2001), pp. 147-201.

Il nostro commento si fermerà allora soprattutto sul tentativo di fusione delle due accademie.

Nel paragrafo secondo descriveremo sommariamente la successione dei fatti utilizzando prevalentemente la relazione ufficiale apparsa nelle Memorie della Società italiana<sup>2</sup>; nel terzo paragrafo li discuteremo alla luce degli ampi materiali, soprattutto epistolari, emersi in questi ultimi anni.

Tale tema è stato infatti già esaminato abbastanza di recente da vari autori: Giuseppe Penso<sup>3</sup>, Guido Quazza<sup>4</sup>, Pietro Ziliani<sup>5</sup>, Giovanni Paoloni<sup>6</sup>.

Penso ha edito molti materiali contenuti nell'archivio della Società nazionale. L'ottica prevalente secondo la quale egli descrive l'argomento è quella della sua rilevanza nello sviluppo della Società.

Quazza utilizza soprattutto i materiali contenuti nell'archivio della Fondazione Sella, per lumeggiare l'azione di Sella come uno dei creatori del sistema scientifico italiano del secondo Ottocento.

Ziliani riprende, esaminandoli in maniera analitica, i materiali dell'archivio Sella; mette in luce la corrispondenza Sella-Genocchi attraverso le lettere di Genocchi a Sella conservate in tale archivio e alcune minute di Sella; esplora il fondo Genocchi conservato presso la Biblioteca Passerin-Landi di Piacenza, nel quale peraltro sono

<sup>2</sup> Cfr. P. D. Marianini, *Annali della Società italiana delle Scienze fondata da Anton-Mario Lorgna continuate dal Segretario Amministratore di essa dal 1° marzo 1868 al 16 aprile 1875*, Memorie della Società italiana delle Scienze, s. III, t. II (1869-1876), pp. VII-XXXI.

<sup>3</sup> Cfr. G. Penso, *Scienziati italiani e unità d'Italia. Storia dell'Accademia nazionale dei XL*, Roma, Bardi 1978.

<sup>4</sup> Cfr. G. Quazza, *L'utopia di Quintino Sella. La politica della scienza*. Torino, Comitato di Torino dell'Istituto per la Storia del Risorgimento italiano, 1992, in particolare cap. 17.

<sup>5</sup> Cfr. soprattutto P. Ziliani, *Quintino Sella, presidente dell'Accademia dei Lincei, e la Società italiana delle scienze. Analisi di una corrispondenza inedita (1874-1884)*, "Bollettino storico per la provincia di Novara", v. LXXXVI (1995), pp. 423-475, ma anche P. Ziliani, *Quintino Sella e la cultura napoletana. I Lincei nell'archivio della Fondazione Sella*, Napoli, Vivarium, 2000. Cogliamo l'occasione per precisare che nel primo dei due contributi citati di Ziliani sono contenuti i testi delle lettere n° 9, IX, X, XI, XII, XIII della parte prima.

<sup>6</sup> Cfr. G. Paoloni, *Francesco Brioschi e la questione dell'Accademia nazionale*, in C. G. Lacaita- A. Silvestri (curatori), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897). I Saggi*, Milano, Franco Angeli, 2000, pp. 371-402.

assenti le lettere di Sella a Genocchi. Uno dei suoi obiettivi è lo studio dell'azione di Sella come presidente dei Lincei.

Paoloni propone alcune lettere di Brioschi<sup>7</sup> e di Sella a Cannizzaro<sup>8</sup> custodite presso l'archivio storico dell'Accademia nazionale dei XL e alcune lettere di Sella a Brioschi conservate presso la Biblioteca centrale della Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano. I documenti presentati mettono in luce soprattutto l'azione di Brioschi.

Di tutti questi contributi faremo largo uso nella nostra analisi.

Nel paragrafo quarto infine vengono raccolte alcune altre osservazioni che vanno ad integrare l'apparato critico che correda la *parte prima* e segnaliamo qualche correzione.

L'indice dei nomi citati nelle lettere e nelle note ad esse collegate e l'elenco delle opere citate completano il presente lavoro.

## 2. UNA CRONACA DEGLI AVVENIMENTI

Nel 1868 scomparve improvvisamente Matteucci<sup>9</sup> presidente della Società nazionale. Secondo l'articolo VII dello statuto i due segretari soci, Betti<sup>10</sup> e Parlatore<sup>11</sup>, indissero le elezioni per il nuovo presidente; risultò eletto Brioschi e i segretari comunicarono ai soci con lettera circolare il 29 ottobre dello stesso anno i risultati delle votazioni.

Betti e Parlatore rimisero la loro carica a Brioschi ma questi non provvide alle nomine di due nuovi soci segretari.

Nel corso del suo sessennio di presidenza Brioschi non curò la pubblicazione di nessun volume di memorie della Società; non provvide, a partire dal 1870,

---

<sup>7</sup> Francesco Brioschi; cfr. *parte prima*, lettera n°5, n. 1.

<sup>8</sup> Stanislao Cannizzaro; cfr. *parte prima*, lettera n° 16, n. 3.

<sup>9</sup> Carlo Matteucci (1811-1868); fisico, fu professore all'università di Pisa e ministro della Pubblica istruzione.

<sup>10</sup> Enrico Betti; cfr. *parte prima* lettera n°7, n. 11.

<sup>11</sup> Filippo Parlatore; cfr. *parte prima* lettera n° 8, n. 9.

all'assegnazione dei premi e, a partire dal 1871, non riscosse più l'assegno governativo dovuto alla Società.

Nel settembre 1874 moriva poi Donati<sup>12</sup> che nel settembre 1868 era stato nominato dalla Società a suo rappresentante allo scopo di sistemare le pendenze fra la Società stessa e la vedova di Matteucci e aveva continuato nel seguito a curare gli affari della Società a Firenze invece dei due segretari soci.

Il 19 marzo 1874 veniva eletto presidente dell'Accademia dei Lincei Sella. Il 22 dello stesso mese egli offriva un banchetto ai suoi colleghi lincei e ai ministri di Stato e al momento del brindisi augurale esponeva i principi fondamentali e le linee di azione che avrebbe seguito nel corso della sua presidenza: si trattava di un programma assai ambizioso che vedeva tra i suoi punti più impegnativi la costituzione di una classe di scienze morali, storiche, filologiche e l'acquisizione di una sede di grande prestigio. Entro maggio l'Accademia aveva già deliberato una riforma del suo statuto.

In una conferenza tenuta in Roma il 7 giugno 1874 Brioschi manifestò ad alcuni colleghi, membri contemporaneamente della Società e dell'Accademia tra i quali vi era anche Sella, l'intenzione di proporre l'unione dei due corpi scientifici ricevendone assenso e incoraggiamento.

Per mettere in atto l'iniziativa si attese la venuta al potere di un ministro titolare della Pubblica istruzione essendo allora la carica tenuta interinalmente.

Nel frattempo si concluse, il 29 ottobre 1874 il sessennio di presidenza del Brioschi senza che la cosa venisse immediatamente notata.

In assenza dei soci segretari che avrebbero dovuto invitare i colleghi a eleggere un nuovo presidente, l'incombenza sarebbe toccata a Brioschi. Questi, data l'iniziativa di fusione in atto, non ritenne opportuno indire una nuova elezione.

Salito al potere Bonghi<sup>13</sup> come ministro della Pubblica istruzione, con il suo consenso, Brioschi e Sella coadiuvati presumibilmente da Betti, allora segretario generale del ministero di Pubblica istruzione, per conto di quest'ultimo compilarono uno schema di Statuto che provvedeva all'unione e all'ampliamento dei due corpi scientifici. Il ministero spedì allora al segretario amministratore Marianini<sup>14</sup> lo schema

---

<sup>12</sup> Giovan Battista Donati (1826-1873); fu astronomo e il suo nome fu dato ad una cometa da lui scoperta.

<sup>13</sup> Ruggiero Bonghi; cfr. *parte prima*, lettera n°10, n. 2.

<sup>14</sup> Pietro Domenico Marianini; cfr. *parte prima*, lettera n° 9 n.4.

mentre Brioschi gli faceva pervenire una sua circolare datata 31 dicembre da diffondere ai soci. In essa si illustrava il progetto e si chiedeva ad ogni singolo socio di dichiarare se accettasse "l'ordine di idee svolte nella presente Circolare e nell'unito progetto di Statuto".<sup>15</sup>

Intanto i mormorii sullo status di presidente di Brioschi crescevano. Marianini ritenne opportuno non diffondere la circolare. Il 7 gennaio 1875 due soci milanesi segnalavano esplicitamente a Marianini lo stato di presidente decaduto in cui si trovava Brioschi. Egli stesso veniva allora invitato in assenza dei due soci segretari a indire le votazioni per un nuovo presidente.

Nel medesimo giorno Marianini diffondeva tra i soci una circolare nella quale dava notizia del progetto di fusione trasmesso dal Ministero, affinché fosse comunicato alla Società e questa potesse esprimere il suo voto, e lo allegava. Comunicava inoltre il parere favorevole di Brioschi e notava l'esistenza di dissensi. Segnalava poi lo status di Brioschi e la richiesta fattagli di indire nuove elezioni. Dichiarava di non aderire a tale richiesta stante l'articolo VII dello statuto e di limitarsi a segnalare ai soci la vertenza.

Qualche giorno dopo una lettera ministeriale firmata da Betti perveniva al Marianini. In essa il ministro premetteva di aver confidato che le finalità del progetto di fusione sarebbero state indicate dal presidente della Società stessa; non essendo ciò accaduto per lo stato di decadenza di Brioschi segnalato nella circolare del socio amministratore si riteneva in dovere di indicare gli scopi del governo.

Chiariti tali intendimenti il ministro affermava che il governo non era intenzionato a forzare la volontà dei soci: anche in presenza di una minoranza dissenziente ragguardevole non avrebbe dato corso al suo progetto di fusione.

Concludeva invitando Marianini a diffondere la ministeriale tra i soci pregandoli di esprimere il loro voto entro il 20 gennaio affinché il governo potesse deliberare.

Il 12 gennaio Marianini diffondeva la ministeriale con una sua circolare.

In risposta si ottennero otto lettere individuali dei soci Schiaparelli<sup>16</sup>, Secchi<sup>17</sup>, Bellavitis<sup>18</sup>, Genocchi, Tardy<sup>19</sup>, Chelini<sup>20</sup>, Frisiani<sup>21</sup>, Lombardini<sup>22</sup> che si dichiaravano

<sup>15</sup> cfr. P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2, p. XXVI.

<sup>16</sup> Giovan Virgilio Schiaparelli; cfr. *parte prima*, lettera n° 8, n. 10.

<sup>17</sup> Angelo Secchi; cfr. *parte prima*, lettera n° 7, n. 8.

<sup>18</sup> Giusto Bellavitis; cfr. *parte prima*, lettera n° 6, n. 3.



contrari e sostenevano non doversi prendere alcuna deliberazione sinché non fosse stato eletto il nuovo presidente.

Diedero voto contrario attraverso sette lettere individuali anche i soci Mainardi<sup>23</sup>, Porta<sup>24</sup>, Santini<sup>25</sup>, Bufalini<sup>26</sup>, Sismonda<sup>27</sup>, Sandri<sup>28</sup>, Cornalia<sup>29</sup>.

Davano voto favorevole attraverso una dichiarazione collettiva sette soci: Cannizzaro, Betti, Menabrea<sup>30</sup>, De Notaris<sup>31</sup>, Cremona<sup>32</sup>, Beltrami<sup>33</sup>, Sella.

Davano ancora voto favorevole attraverso lettere individuali tre soci: De Gasparis<sup>34</sup>, Gastaldi<sup>35</sup>, Malaguti<sup>36</sup>. Parere favorevole con qualche riserva davano anche con lettere individuali altri tre soci: Parlatore, Stoppani<sup>37</sup>, Minich<sup>38</sup>.

In una lettera collettiva quattro soci, Padula<sup>39</sup>, Scacchi<sup>40</sup>, Trudi<sup>41</sup>, Palmieri<sup>42</sup> davano parere favorevole ma solo sotto due condizioni, non essendo soddisfatte le quali il loro parere doveva intendersi negativo:

<sup>19</sup> Placido Tardy; cfr. *parte prima*, lettera n° XI, n. 3.

<sup>20</sup> Domenico Chelini; cfr. *parte prima*, lettera n° 7, n. 9.

<sup>21</sup> Paolo Frisiani (1795-1880); astronomo, lavorò all'osservatorio di Brera.

<sup>22</sup> Elia Lombardini; cfr. *parte prima*, lettera n° 7, n. 7.

<sup>23</sup> Giuseppe Mainardi (1800-1879); matematico, fu professore a Pavia.

<sup>24</sup> Luigi Porta (1800-1875); medico chirurgo, fu professore di anatomia clinica a Pavia.

<sup>25</sup> Giovanni Santini; cfr. *parte prima*, lettera n° XI, n. 5.

<sup>26</sup> Maurizio Bufalini; cfr. *parte prima*, lettera n° 5, n. 7.

<sup>27</sup> Angelo Sismonda; cfr. *parte prima*, lettera n° XI, n. 2.

<sup>28</sup> Giulio Sandri (1789-1876); era membro della Società in quanto designato dall'Accademia di Agricoltura, Arte e Commercio di Verona;

<sup>29</sup> Emilio Cornalia; cfr. *parte prima*, lettera n° 8, n. 5.

<sup>30</sup> Luigi Federico Menabrea (1809-1896); fisico matematico, generale, uomo politico fu anche per qualche anno presidente del consiglio dei ministri.

<sup>31</sup> Giuseppe De Notaris (1805-1877); botanico, fu professore alle università di Genova e di Roma.

<sup>32</sup> Luigi Cremona; cfr. *parte prima*, lettera n° 15, n. 1.

<sup>33</sup> Eugenio Beltrami (1835-1900); geometra e fisico matematico, fu professore alle università di Bologna, Pavia e Roma.

<sup>34</sup> Annibale De Gasparis; cfr. *parte prima*, lettera n° 8, n. 14.

<sup>35</sup> Bartolomeo Gastaldi; cfr. *parte prima*, lettera n° 8, n. 7.

<sup>36</sup> Faustino Malaguti; (1802-1878); chimico organico, fu professore a Rennes.

<sup>37</sup> Antonio Stoppani (1874-1891); sacerdote rosminiano, fu scienziato e letterato.

<sup>38</sup> Serafino Raffaele Minich; cfr. *parte prima*, lettera n° XXI, n. 1.

che la Società si chiamasse *Regia Società Italiana delle Scienze* e fosse suddivisa in due Accademie distinte;

che la Società fosse munita di mezzi di pubblicazione e fosse in grado di "rimunerare i Soci ordinari con un assegnamento fisso e con un cospicuo gettone di presenza per coloro che intervengano alle adunanze".<sup>43</sup>

Il socio Turazza<sup>44</sup> infine dichiarava che non avrebbe dato un voto definitivo finché non fossero state recate alcune variazioni al progetto.

Il progetto di fusione così cadde.

Il 21 gennaio Marianini indiceva le elezioni del nuovo presidente con una sua circolare. Scaduto dopo due mesi il termine prescritto per le votazioni, il 24 marzo veniva effettuato lo spoglio. Risultava così eletto Scacchi con 15 voti, seguivano Bellavitis con 14 e Santini, Schiaparelli e Sella con un voto ciascuno.

Il 25 aprile Marianini comunicava a Scacchi l'esito; questi il 26 accettava e il 6 aprile Marianini dava notizia ai soci degli eventi.

Nel maggio 1875 Marianini chiedeva di essere esonerato dell'ufficio di segretario amministratore.

Nell'aprile 1876 Scacchi dopo aver revisionato i conti della Società dava notizia che: "Dal Ministero della pubblica istruzione si è avuta notizia che il Presidente della Società [sc. Brioschi] riscosse £ 3.800 per l'assegno governativo dovuto alla Società medesima per l'anno 1869, e così pure £ 3.800 per l'anno 1869 e £ 3.600 per l'anno 1870. Di queste somme la presente Amministrazione non ha potuto ottenere alcun rendiconto."<sup>45</sup>

<sup>39</sup> Fortunato Padula; cfr. *parte prima*, lettera n° XI, n. 7.

<sup>40</sup> Arcangelo Scacchi; cfr. *parte prima*, lettera n° 8, n. 13.

<sup>41</sup> Nicola Trudi; cfr. *parte prima*, lettera n° XI, n. 10.

<sup>42</sup> Luigi Palmieri; cfr. *parte prima*, lettera n° XI, n. 8.

<sup>43</sup> cfr. P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2; le parole tra virgolette sono una citazione di Marianini tratta dalla lettera di Padula, Scacchi, Trudi, Palmieri.

<sup>44</sup> Domenico Turazza; cfr. *parte prima*, lettera n° 7, n. 6.

<sup>45</sup> cfr. A. Scacchi, *Notizia*, Memorie della Società italiana delle Scienze, s. III, t. II (1869-1876), p. LXIII.

### 3. UN'ANALISI DEGLI AVVENIMENTI

Nell'Italia preunitaria vi era un notevole numero di accademie sia scientifiche sia letterarie sia di natura congiunta.

Alcune di esse erano state direttamente istituite dai sovrani dei singoli stati. Queste ultime avevano tra i loro compiti sia quello di sostenere lo sviluppo scientifico o artistico, sia quello di fungere da organi di consulenza. Basti citare a questo proposito l'Accademia delle Scienze di Torino e quella di Napoli.

Quasi tutte distinguevano i loro soci in residenti e non residenti e l'effettiva gestione dell'accademia finiva col ricadere sui primi. Si aveva così una struttura sostanzialmente locale. In questo quadro la Società italiana<sup>46</sup> delle Scienze costituiva un'eccezione notevole. Il suo fondatore aveva fissato in quaranta il numero dei soci e non aveva distinto in base alla origine geografica; la sede della Società coincideva con quella del presidente *pro tempore*. Non vi era inoltre obbligo di riunioni: i lavori si svolgevano attraverso comunicazioni epistolari.

Per queste caratteristiche oltre che per l'elevato valore scientifico dei suoi membri la Società era naturalmente diventata un punto di riferimento per le grandi accademie scientifiche europee in quelle questioni che riguardassero l'Italia nella sua totalità. La sua azione aveva così anche assunto un significato ideologico più generale: il riconoscimento, almeno nel settore scientifico nel quale essa operava, di una sostanziale unità culturale italiana.

La Società, nel corso (al 1870) dei suoi oltre ottanta anni di vita era anche riuscita ad ottenere dei sostegni finanziari statali, inizialmente dalle repubbliche costitutesi con l'aiuto francese nell'Italia del nord, poi dal Regno napoleonico d'Italia, infine dal ducato di Parma, Piacenza e Guastalla.

Già nel giugno 1860, quando il processo di unificazione italiano aveva coinvolto buona parte dell'Italia centro-settentrionale cominciò ad avvertirsi il problema della

---

<sup>46</sup> Sulla prima fase di vita della Società italiana delle Scienze, oltre l'opera di G. Penso *Scienziati italiani*, cit. in n. 2, si veda C. Farinella, *L'Accademia repubblicana. La Società dei Quaranta e Anton Mario Lorgna*, Milano, Franco Angeli, 1993.

creazione di un istituto culturale nazionale. Fu Mamiani<sup>47</sup>, allora ministro della Pubblica istruzione, a tentare di risolvere la questione con un progetto di legge presentato alla Camera dei deputati il 12 giugno 1860<sup>48</sup>.

Egli scelse a modello l'Institut de France per costituire un Istituto nazionale italiano di scienze e di lettere. Questo istituto doveva essere un ampliamento della Società e doveva anche inglobare l'Accademia delle Scienze di Torino, l'Istituto di scienze lettere ed arti di Milano, l'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, l'Accademia della Crusca.

Il progetto non fu trasformato in legge per l'opposizione della Società e forse anche per i rapidi sviluppi della situazione politica che vedeva estendersi il processo di unificazione all'Italia centro-meridionale.

Fu posta peraltro dal presidente *pro tempore* della Società Stefano Marianini<sup>49</sup> la questione della legittimità dell'intervento dello Stato nelle questioni della Società data la sua natura di ente privato.

A questa tesi Mamiani contrappose il parere di un giureconsulto: la Società possedeva le caratteristiche di un corpo morale che agiva pubblicamente e aveva una personalità civile, pertanto il potere legislativo era competente non solo a dare ad esso normative ma anche a modificare la costituzione entro i limiti determinati dal diritto naturale dello Statuto del regno, dai diritti acquisiti e dalla intenzione del fondatore<sup>50</sup>.

Dopo la presa di Roma e quindi dopo il completamento dell'unificazione del paese il problema di un'accademia nazionale si pose di nuovo con forza. In effetti oltre le università, solo un'accademia nazionale largamente dotata di fondi per pubblicazioni, pensioni, premi, interventi su singole iniziative poteva essere sostegno all'attività scientifica.

Un organismo di tale natura poteva anche svolgere stabilmente funzioni di consulenza in questioni scientifiche per il potere esecutivo.

---

<sup>47</sup> Terenzio Mamiani della Rovere; cfr. *parte prima*, lettera V, n. 2.

<sup>48</sup> Mamiani descrisse le sue finalità nel volume *Questione della Società italiana delle Scienze detta dei Quaranta*, Torino, Tipografia eredi Motta, 1861.

<sup>49</sup> Stefano Marianini (1790-1866); fisico, fu professore all'università di Pavia e padre di Pietro Domenico.

<sup>50</sup> cfr. G. Penso *Scienziati italiani*, cit in n. 2, pp. 298-307.

In tal modo si sarebbe costituito un equivalente di celebri istituzioni stranieri, quali l'Accademia di Berlino o il già citato Istituto di Francia.

Ma agiva anche un'altra motivazione: l'Italia aveva nuovamente il suo centro a Roma; si apriva dopo la Roma imperiale e quella papale un terzo ciclo che doveva incardinarsi su qualche progetto cosmopolita.

Ad un Mommsen<sup>51</sup> che nel 1871 chiedeva a Sella quale fosse questo progetto cosmopolita Sella rispondeva che esso consisteva nel progresso della scienza<sup>52</sup>.

Dopo però l'ascesa della Germania imperiale con le sue grandi vittorie militari e culturali il modello di riferimento tendeva a modificarsi anche in relazione alle accademie.

L'attenzione dall'Istituto di Francia passava all'Accademia di Berlino.

Sella conclude la sua esperienza ministeriale nel 1873 e divenuto presidente dell'Accademia dei Lincei tenta di realizzare il suo progetto: la terza Roma è la Roma della scienza<sup>53</sup>.

Ma, nel suo tentativo di trasformare l'Accademia dei Lincei in una prestigiosa accademia nazionale che copra sia le scienze naturali che quelle umanistiche, Sella si trova di fronte subito a due difficoltà.

L'Accademia dei Lincei allora solo di natura scientifica e di ambito romano risulta indebolita dalla scissione effettuata da 14 soci e dalla costituzione della Accademia pontificia dei Nuovi Lincei.

Inoltre è la Società italiana che già ha natura non locale e accoglie i quaranta più prestigiosi scienziati italiani.

---

<sup>51</sup> Theodor Mommsen (1817-1903); fu storico insigne delle antichità romane.

<sup>52</sup> L'episodio narrato da Sella alla Camera nella seduta del 14 marzo 1881 è riportato in A. Guiccioli, *Quintino Sella*, 2 voll., Rovigo 1888-1889, ma Biella, Libreria Vittorio Giovannacci, 1988 ristampa anastatica. Esso è menzionato anche in P. Ziliani, *Quintino Sella presidente*, cit. in n. 5.

<sup>53</sup> Il ruolo di Sella nel definire una nuova idea di Roma è messo ben in evidenza da G. Quazza nel suo *L'utopia di Quintino Sella* cit. in n. 4, cap. 18 e approfondito in P. Ziliani, *Quintino Sella presidente* cit. in n. 5, sulla scorta di alcune osservazioni di Chabod riprese da F. Bartoccini in *Quintino Sella tra politica e cultura 1827-1884*, Atti del Convegno di studi, Torino, Palazzo Carignano 24-26 ottobre 1984, pp. 245-265

Data la natura non laica dei Nuovi Lincei questa potrà forse creare qualche imbarazzo a qualche scienziato nel caso di una doppia associazione<sup>54</sup>, ma risulta addirittura di stimolo alla creazione di una accademia nazionale italiana.

La Società può invece costituire un problema più grave in quanto ci si trova di fronte ad una evidente duplicazione con spreco di risorse almeno per il settore scientifico. D'altra parte è proprio la presenza di una classe scientifica nell'accademia che si va a riformare che può favorire l'istituzione di una classe essenzialmente umanistica. Anche in questo caso infatti vi è materiale per un'aspra critica politica in un paese come l'Italia che ha conosciuto l'Arcadia nonostante l'impetuosa avanzata delle scienze umane soprattutto in Germania. Contemporaneamente la presenza di una classe umanistica allinea la nuova accademia alle analoghe istituzioni europee e può procurare notevoli sostegni politici stimolando anche l'ambizione personale.

Queste osservazioni sembrano trasparire nel discorso<sup>55</sup> che Sella tiene al momento del brindisi il 22 marzo 1874 e che si conclude con una chiara *captatio benevolentiae* nei confronti di Minghetti<sup>56</sup> allora presidente del Consiglio dei Ministri.

Non è forse un caso che, completata la procedura legislativa di riforma dell'Accademia dei Lincei, la classe di scienze morali, storiche e filologiche si riempia subito di ministri in carica come Bonghi e lo stesso Minghetti e di ex ministri come Amari<sup>57</sup>, Berti<sup>58</sup>, Boncompagni<sup>59</sup>, Correnti<sup>60</sup>, Ferrara<sup>61</sup>, Mamiani, Scialoja<sup>62</sup>, peraltro illustri cultori delle loro discipline<sup>63</sup>.

<sup>54</sup> Si vedano ad esempio le perplessità di Charles Hermite (cfr. *parte prima*, lettere n° 19 e XXIV).

<sup>55</sup> Il discorso tenuto da Sella nell'occasione è riportato in Q. Sella, *Discorsi parlamentari di Quintino Sella raccolti e pubblicati per deliberazione della Camera dei Deputati*, Roma, Tipografia della Camera dei Deputati, v. I 1887; v. II 1888; v. IV 1889; v. V 1890; v. I pp. 805-812.

<sup>56</sup> Marco Minghetti (1818-1886); esperto di finanza e di diritto costituzionale, fu a lungo presidente del Consiglio dei ministri.

<sup>57</sup> Michele Amari (1806-1889); fu storico e orientista.

<sup>58</sup> Domenico Berti (1820-1897); filosofo, fu professore alle università di Torino e Roma, fu ministro varie volte.

<sup>59</sup> Carlo Boncompagni di Mombello (1804-1880); giureconsulto, fu più volte ministro del Regno di Sardegna.

<sup>60</sup> Cesare Correnti (1815-1888); esperto di statistica, fu varie volte ministro.

<sup>61</sup> Francesco Ferrara (1810-1900); economista, fu professore a Torino, Pisa, Palermo e, una volta, ministro.

La proposta allora, di Brioschi, uno dei protagonisti del progresso tecnico scientifico nell'Italia postunitaria, fondatore del Politecnico di Milano, su una "riunione", per usare la sua terminologia<sup>64</sup>, tra l'Accademia dei Lincei e la Società italiana non può allora non ottenere l'adesione di Sella.

Ma come nasce la proposta di Brioschi?

Certamente egli ritiene inadeguate le procedure della Società. In un'Italia in cui gli spostamenti sono enormemente facilitati dalla rete ferroviaria, che si va completando dopo un quindicennio di febbrile attività, e che ha in Roma un naturale baricentro, il sistema di contatti esclusivamente epistolari su cui si basa la Società deve ormai essere sostituito dalla possibilità di avere delle adunanze<sup>65</sup>.

E' probabile che egli condivida, data la sua esperienza di uomo di cultura e di uomo politico, molte delle motivazioni di Sella.

Va tuttavia osservato che la sua posizione è, all'interno della Società che presiede, ormai difficile. Per sei anni si è sostanzialmente disinteressato di essa riducendola al silenzio e voci sul disordine contabile della Società è presumibile siano circolate forse anche ad opera di Marianini che pur essendo segretario amministratore non ha amministrato nulla.

Sembra allora difficile che si possa pensare a una sua rielezione in un'epoca nella quale le cariche di presidente di accademia erano quasi a vita: Per citare il caso della Società stessa i suoi predecessori immediati Stefano Marianini e Carlo Matteucci erano morti presidenti, il suo successore Scacchi non si ricandiderà a 83 anni dopo diciotto anni di presidenza e Cremona da presidente morirà nel 1903. Lo stesso Brioschi eletto presidente dei Lincei alla morte di Sella nel 1884 conserverà la carica fino alla sua morte nel 1897. Non a caso dunque, quando la proposta di fusione di Brioschi viene messa in discussione tra i soci, viene messo in rilievo da parte di molti di essi lo stato di presidente decaduto nel quale si trova Brioschi.

---

<sup>62</sup> Antonio Scialoja (1817-1877); economista, fu professore a Torino.

<sup>63</sup> Sulle cooptazioni nell'Accademia dei Lincei si vedono G. Quazza, *L'utopia di Quintino Sella*, cit. in n. 4 cap. 18; P. Ziliani, *Quintino Sella presidente e Quintino Sella e la cultura napoletana*, cit. in n. 5.

<sup>64</sup> Il verbo riunire è utilizzato nella sua circolare del 31 dicembre 1874, riportata in P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2.

<sup>65</sup> E' questa l'argomentazione su cui egli si diffonde nella sua circolare, per la quale si veda n. 64.

In otto chiederanno che prima di discutere il progetto di fusione si proceda all'elezione del nuovo presidente.

Essi, e tra questi lo stesso Genocchi, un tempo professore di istituzioni civili a Parma, contro anche dei precedenti nella Società stessa non sono disposti ad affidare a Brioschi alcuna ulteriore mansione.

Vale la pena di ricordare ancora che Brioschi non nominando i segretari soci ha arrestato le procedure per l'elezione del nuovo presidente. Si dovrà allora farle indire dal segretario amministratore Marianini, l'unico ad occupare regolarmente una carica, che peraltro non è un socio.

Scriverà così Genocchi a Sella il 29 dicembre 1874: "Brioschi non ha fatto nulla per essa [sc. la Società] finchè ne fu presidente: vorrebbe ora occuparsene visto che i suoi poteri sono cessati e occuparsene per seppellirla?"<sup>66</sup>

Ribadisce il 16 gennaio 1875 che "ne risulta che il ministro aveva trattato col Brioschi credendolo Presidente dei XL e quindi o che il Brioschi non sapeva d'essere uscito di carica o che sapendolo aveva dissimulato, questa che il Ministro con espressione tutta umoristica chiama spiacevole circostanza."<sup>67</sup>

Aggiunge poi una citazione a commento: "Il briconcel che non se n'era accorto faceva il presidente ed era morto."<sup>68</sup>

Sella risponde il 18 gennaio ribadendo che Brioschi è "tuttora legittimo Presidente."<sup>69</sup>

Queste considerazioni chiariscono forse in parte quell'atteggiamento "supino"<sup>70</sup> che Penso riscontra in Brioschi in tutta la vicenda.

Penso inoltre, è incline a considerare l'opposizione al progetto di riforma della Società come una trama ordita da Marianini per conservare "quel posto di prestigio [sc. di segretario amministratore] che da anni aveva e che nella piccola città di Modena contava per qualche cosa."<sup>71</sup>

---

<sup>66</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° VIII.

<sup>67</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° X.

<sup>68</sup> *Ibidem*.

<sup>69</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 7.

<sup>70</sup> Cfr. G. Penso, *Scienziati italiani*, cit. in n. 3, cap. XVII p. 338.

<sup>71</sup> Cfr. *ibidem* p. 334.



Lo stesso Sella sembra confermare parzialmente l'ipotesi di un ruolo ostile al progetto svolto da Marianini quando il 20 febbraio 1875 scrive a Genocchi che ha formulato a suo avviso un giudizio poco lusinghiero di Scacchi: "voglio credere che una buona dose di umore atrabiliare da un lato ed una frase infelice dall'altra astutamente messa in rilievo dal Marianini vi abbiano indotto ad un giudizio così stranamente lontano dal vero."<sup>72</sup> E il riferimento sembra proprio essere ancora una volta a una questione economica: la condizione sulla fusione sottoscritta da Scacchi e relativa alla remunerazione dei soci con un assegno fisso e un gettone di presenza<sup>73</sup>.

Ma è anche opinione di Brioschi che Marianini abbia agito contro la fusione. Scrive infatti a Sella il 4 febbraio 1875: "Spero che in seguito daremo tutti insieme una lezione al sig. Marianini."<sup>74</sup>

L'atteggiamento di Brioschi si presta tuttavia ad essere esaminato anche alla luce di altri eventi che lo hanno coinvolto nei primi anni settanta.

In un ciclo ascendente di Borsa nella primavera del 1871 viene fondata la Banca di costruzioni di cui Brioschi diventa presidente e direttore. Egli siede anche nel consiglio della Banca generale e si determina una massiccia compenetrazione dei due istituti. Le azioni della Banca di costruzioni vengono contese con un vistoso guadagno per i soci fondatori, ma la Banca si è avventurata in una serie di speculazioni assai rischiose oltre che in Italia anche in Ungheria e Galizia. Si scatena allora un giro di cambiamenti nel consiglio di amministrazione, di violazioni statutarie, di espedienti contabili.

Il crollo della borsa di Vienna segna nel 1875 la messa in liquidazione della Banca di costruzioni con il concorso della Generale.

La pubblicazione della sentenza civile sui fatti avvenne nel 1884 proprio quando Brioschi incappava nella disavventura della Fabbrica lombarda di prodotti chimici.<sup>75</sup>

---

<sup>72</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 9.

<sup>73</sup> Cfr. il paragrafo 2 e la nota 43.

<sup>74</sup> La lettera è custodita a Biella presso la Fondazione Sella, Fondo Quintino. Essa è citata in G. Paoloni, *Francesco Brioschi e la questione dell'Accademia nazionale*, cit. in n. 6.

<sup>75</sup> Cfr. su tutta la questione E. Cantarella, *Brioschi e la questione ferroviaria*, in C. G. Lacaita - A. Silvestri (curatori), *Francesco Brioschi*, cit. in n. 6, pp. 243-250.

L'“Uomo di Pietra” il 25 maggio 1884 pubblica una vignetta nella quale è ritratto Depretis che su un muletto conduce una donna con una corona turrata, l'Italia, in un bosco nel quale, nascosto dietro un albero, vi è il brigante Briossu.<sup>76</sup>

Su “Il Guerin Meschino” il 17 agosto 1884 appare la riproduzione di una falsa medaglia sul diritto della quale appare una caricatura di Brioschi con sullo sfondo un alambiccio e sul rovescio la dedica:

“A Francesco Brioschi, seccatore, che illustrò la matematica indiana col suo trattato teorico-pratico sulle quantità negative. I suoi azionisti, 1884.”<sup>77</sup>

Sono questi eventi collegabili al disordine contabile della Società italiana? e quanto di essi è noto ai membri della Società?

Certo è che Genocchi non esiterà a scrivere a Sella il 29 dicembre 1874:

“Attenda egli [sc. Brioschi] i suoi interessi personali e lasci in pace la scienza e gli scienziati che nulla di buono possano più da lui aspettarsi.”<sup>78</sup>

Scacchi non esita a dare pubblica notizia nell'aprile del 1876 degli ammanchi di cassa presenti nei conti della Società.<sup>79</sup>

E la questione si trascina nel tempo.

Nel 1882 appaiono le *Notizie storiche*<sup>80</sup> sulla Società redatte da Scacchi.

L'apertura è ispirata al terzo libro degli Annali di Tacito, com'egli stesso osserva:

“Nelle cose che mi accingo a narrare c'imatteremo, come d'ordinario avviene nelle operazioni umane, in fatti lodevoli ed in altri biasimevoli, e questi ultimi non ho voluto né tacere né attenuare, pensandomi la storia non altrimenti tornare utile alle posterità se non narrando le azioni virtuose perché nasca il desiderio d'imitarle; e le biasimevoli perché si tema il disonore che le accompagna.”<sup>81</sup>

E uno dei cattivi della storia è il Brioschi, mentre Marianini è un agente del bene.

Scriva tra l'altro, infatti, Scacchi:

<sup>76</sup> La vignetta è riportata nell'apparato iconografico presente in C. G. Lacaita – A. Silvestri (curatori), *Francesco Brioschi e il suo tempo*, cit. in n. 6.

<sup>77</sup> *Ibidem*.

<sup>78</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° VIII.

<sup>79</sup> Cfr. paragrafo secondo e n. 45.

<sup>80</sup> Cfr. A. Scacchi, *Notizie storiche della Società italiana delle Scienze*, Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle Scienze, s. III, t. V (1882), pp. 17-73.

<sup>81</sup> *Ibidem*, p. 17.

“Successore del Matteucci fu il Brioschi, che assunse la presidenza il dì 28 ottobre dello stesso anno. E con lui cominciò un periodo nel quale la Società dei Quaranta poteva dirsi eclissata”<sup>82</sup>

Aggiunge anche:

“Aveva il Presidente [sc. Brioschi] ricevuto dal Ministero della Pubblica Istruzione gli assegni dei primi tre anni dal 1868 al 1870, in lire 11200 e non ebbe cura di riscuotere gli assegni degli anni successivi, né si è potuto conoscere quale uso siasi fatto della somma. E finito il sessennio della presidenza Brioschi, per le ragioni che anderò ad esporre, non fu provveduto alla nomina del successore, e la Società si trovava senza Segretarii, e mancante di cinque Socii.

E per lo spazio di sei anni non si fece alcuna pubblicazione di memorie, né fu distribuito alcun premio. Se da una parte vi fu questa deplorabile negligenza non debbo tacere che da parte del Segretario Amministratore Pietro Domenico Marianini, che continuò nel suo ufficio senza riscuotere stipendio, furono diligentemente amministrati gli scarsi fondi sociali, e che egli, mantenendo le norme stabilite dal Matteucci, presentò i suoi conti in perfetta regola per essere pubblicati negli Atti della Società.”<sup>83</sup>

Genocchi segnala la frase di Scacchi a Brioschi agli inizi di gennaio del 1883.

Brioschi il 16 dello stesso mese risponde:

“Vi ringrazio di cuore di quanto mi scrivete rispetto ad una accusa dello Scacchi per quanto sciocca ed assurda.”<sup>84</sup>

Sulla non riscossione dei contributi ministeriali precisa:

“Ho pagato tutto l'arretrato poi non riscossi più nulla sembrandomi inutile quella somma ad una Società che per il mio modo di vedere aveva vissuto ma non aveva più ragione di essere. Tornando a Milano vedrò questo volume e ne scriverò a Scacchi come si deve.”

Afferma anche che:

“Il Donati che era l'amministratore e che doveva avere i conti era anche morto nel frattempo: salvo che per alcune medaglie ed altre spese che ora non ricordo non mi fu

<sup>82</sup> *Ibidem*, p. 57.

<sup>83</sup> *Ibidem*, p. 58.

<sup>84</sup> La lettera è custodita presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica “Renato Caccioppoli” dell'Università di Napoli “Federico II”, Fondo Siacci, fascicolo Brioschi.

possibile documentare il tutto. Ma non avrei mai dubitato che quella mia resa di conti potesse lasciare dubbi.”

Conclude allora con un colpo magistrale:

“Del resto appurata la cosa il mio progetto è questo.

Io proporrò voi ed un altro collega da voi designato a prendere notizia di quel resoconto; e verserò alla cassa della Società quel tanto che mi direte...”

Il 3 giugno 1883, Brioschi scrive nuovamente a Genocchi:

“La morte del nostro collega Minich mi ha offerto il modo che a me pare il migliore, per compensare la Società italiana dai danni materiali che io avessi potuto arrecarle. Sono divenuto uno fra i tre più anziani e quindi pensionato: scrissi tosto al Presidente protestando contro le parole da voi segnalatemi dichiarandole offensive ed ingiuste da ogni punto di vista ed aggiungendo di devolvere la pensione di lire 300 annue per tutta la mia vita a beneficio della Società. Ho 58 anni e salute buonissima, spero quindi ne usufruirò per un pezzo.”<sup>85</sup>

Genocchi replica il 4 giugno ed il 5 Brioschi ribadisce:

“Caro amico,

dalla vostra lettera in data di ieri debbo arguire vi sia un equivoco tra noi. Non è possibile che vi scrivessi nel Gennaio essere mio intendimento di mandarvi il resoconto della mia gestione, non avendo più nota alcuna che la riguardasse. Chi faceva le spese, chi veramente amministrava era il povero Donati, e se io non potei mandare tutte *les pièces justificatives* fu appunto per la sua morte.”<sup>86</sup>

Brioschi scrive a Scacchi dichiarando di rinunciare alla pensione a beneficio della Società e aggiunge:

“Non devo tacerle, Signor Presidente che fecero a me pessima impressione le parole che la S. V. lasciò di stampare alla pag. 58 delle notizie storiche della Società tomo 5° e di esse mi sento offeso.”<sup>87</sup>

---

<sup>85</sup> Cfr. n. 84.

<sup>86</sup> Cfr. n. 84.

<sup>87</sup> Il brano, riportato come quello successivo, è tratto da una lettera del 6 luglio 1883 inviata da Scacchi a Genocchi; entrambi sono virgolettati e costituiscono estratti dello scambio epistolare intervenuto tra Brioschi e Scacchi. La lettera è custodita presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica “Renato Caccioppoli” dell’Università di Napoli “Federico II”, Fondo Siacci, fascicolo Brioschi. Va segnalato che

Scacchi gli ribatte:

“Sarà mia cura che di tale rinunzia si conservi la memoria negli annali della Società del corrente anno, e sarei disposto di aggiungere anche il periodo della sua lettera con la quale si duole di quanto trovasi pubblicato nella pag. 58 se alla S. V. non dispiace; o assai meglio mi piacerebbe pubblicare negli Annali le sue osservazioni che mostrerebbero la inesattezza di quanto si riferisce in quella pagina.”

Ma nel 1883 le vecchie pendenze vanno ormai sanate. Brioschi si muove con altri obiettivi: la presidenza dell'Accademia dei Lincei. Scrive infatti a Cannizzaro il 25 luglio 1883:

“Però non credo sia il caso di dare dimissioni; il Sella deve andarsene alla fine dell'anno; sarà allora il momento di avere un momento di energia.”<sup>88</sup>

Sella sarà riletto ma Brioschi diventerà presidente egualmente alla morte di questo avvenuta il 14 marzo 1884.

Si comprende allora bene perché Genocchi il 16 gennaio 1875 scriva a Sella, distinguendo le posizioni di questi da quelle di Brioschi:

“Sono di nuovo a voi che credo il più leale tra i fautori della proposta di fusione dei XL coi Lincei.”<sup>89</sup>

Ma l'atteggiamento di Genocchi nei confronti dei legami tra questioni economiche e questioni scientifiche è molto severo.

Verso la fine della sua vita, ad esempio, sarà assai indignato contro Peano<sup>90</sup> suo giovane assistente che sospetterà di aver pubblicato il *Calcolo differenziale*<sup>91</sup> utilizzando la copertura del suo nome a fini di lucro.<sup>92</sup>

nell'archivio della corrispondenza Scacchi custodito presso la Fondazione “Pomarici Santomasi” di Gravina sono presenti lettere di Brioschi ma non lettere di Genocchi e di Sella (cfr. F. Raguso – M. D'Agostino, *Arcangelo Scacchi. Pietra miliare: cristallografia, mineralogia, vulcanologia*, Gravina di Puglia, s. e. 1999).

<sup>88</sup> La lettera, conservata in Roma presso l'Archivio storico dell'Accademia nazionale delle Scienze detta dei Quaranta, Carte Cannizzaro, scatola 1, fascicolo Brioschi Francesco, è riportata in G. Paoloni, *Francesco Brioschi e la questione dell'Accademia nazionale*, cit. in n. 6.

<sup>89</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° X.

<sup>90</sup> Giuseppe Peano (1858-1932); matematico, fu professore all'università di Torino.

<sup>91</sup> Il testo è A. Genocchi, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicati con aggiunte del dr. Giuseppe Peano*, Torino, Fratelli Bocca, 1884.

Pochi anni prima aveva anche avuto uno scontro proprio con Brioschi sulla questione dell'insegnamento della matematica nei licei classici. Cremona è nella commissione che doveva riformare i programmi e si batte per un uso diretto dei testi di Euclide, in quanto fornisce una pura visione geometrica. Nel frattempo Betti e Brioschi preparano una nuova edizione di questo testo, peraltro eccellente<sup>93</sup>. L'epistolario Betti<sup>94</sup> rivela che a questa nuova edizione collabora anche Cremona e vi sarà una ripartizione degli utili.<sup>95</sup>

D'altro canto le attestazioni di un carattere "bilioso" di Genocchi non mancano.

Di umore "atrabiliare" parla Sella nella già citata lettera del 20 febbraio 1875.<sup>96</sup>

Un "siete proprio uscito dai gangheri" gli viene scritto anche da un Cremona peraltro a lui legato da sentimenti di riconoscenza e di gratitudine a proposito dell'affare Levi<sup>97</sup>. E proprio il termine bilioso viene utilizzato nei suoi confronti da Menabrea in una sua lettera a Sella dell'8 gennaio 1875.

"In quanto al Genocchi egli ha sempre il fegato in istato di ebollizione e la sua biliosa fantasia ha bisogno di una vittima morta o viva da divorare; ora Brioschi fa le spese del di lui fiero pasto."<sup>98</sup>

Evidentemente l'immagine dantesca del conte Ugolino si deve essere formata in Menabrea quando egli stesso è stato "fiero pasto" in un contesto scientifico di un Genocchi che difendeva le buone ragioni del suo defunto maestro Felice Chiò.<sup>99</sup>

<sup>92</sup> Sulla questione cfr. H. C. Kennedy, *Peano. Storia di un matematico*, Torino, Boringheri, 1983, e sul punto specifico L. Carbone- R. Gatto- F. Palladino, *L'epistolario Cremona- Genocchi (1860-1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*. Firenze, Olschki, 2001.

<sup>93</sup> Cfr. E. Betti - F. Brioschi, *Gli Elementi di Euclide con note, aggiunte ed esercizi ad uso de' Ginnasi e de' Licei*, Firenze, Le Monnier, 1867-1868.

<sup>94</sup> Cfr. R. Gatto, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in M. Menghini (curatrice), *Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, v. III, Quaderni P.RI.ST.EM., Università Bocconi di Milano n. 9, Palermo 1996, pp. 7-90.

<sup>95</sup> Cfr. sulla questione L. Carbone- R. Gatto - F. Palladino, *L'epistolario Cremona- Genocchi*, cit. in n. 92.

<sup>96</sup> Cfr. n. 72.

<sup>97</sup> Cfr. L. Carbone- R. Gatto- F. Palladino *L'epistolario Cremona- Genocchi*, cit. in n. 92.

<sup>98</sup> La lettera è custodita a Biella presso la fondazione Sella, fondo Quintino Sella ed è citata in P. Ziliani *Quintino Sella presidente*, cit. in n. 5.

<sup>99</sup> Cfr. U. Bottazzini, *Angelo Genocchi e i principi del calcolo*, in R. Conte- L. Giacardi (curatori), *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributo dall'epistolario*, Torino, Deputazione Subalpina di

In ogni caso le critiche vengono da chi è assai attivo sul fronte politico (Sella, Menabrea) o lo sarà (Cremona) e dunque risulta più aperto al vivere sociale e alle sue esigenze.

Ma è possibile individuare sentimenti comuni tra i Quaranta in quanto membri della Società?

Certamente vi è un forte spirito di corpo scelto. Oltre i dissidi e le diversità di carattere si riconoscono reciprocamente come scienziati di valore. Lo stesso ministro ricorda, quando propone la fusione della Società con l'accademia dei Lincei, che:

"Inoltre sapeva il Governo la severità con cui erano fatte le elezioni della Società dei quaranta ed in nessun altra Accademia poteva trovare raccolto tutto il fiore degli scienziati italiani senza prevalenze locali."<sup>100</sup>

Occorre tuttavia notare che la ministeriale è firmata da Betti, uno dei Quaranta, e in essa si propone qualcosa di non gradito a tutti.

Un notevole timore per i meccanismi di cooptazione nella classe di scienze umanistiche e più in generale per l'autonomia della Società sembra allora emergere quando si discute sulla fusione.

Genocchi è molto esplicito nel manifestare questo sentimento scrivendo a Sella il 13 gennaio 1875:

"E la nuova Classe creata senza dire come si nomineranno i primi 30 suoi membri...

Potete del resto aggregare ai Lincei quanti vorrete. Solamente se la cosa mi riguardasse io dubiterei dell'utilità dell'aggiunta d'una Classe di filosofi e filologi; si facciano due Accademie distinte ma la riunione mi pare più nociva che utile..."<sup>101</sup>

Sella rispondendo il 18 gennaio ammetterà:

"... a malincuore scrissi nel progetto l'articolo che richiedeva l'approvazione governativa dei soci eletti. Il feci perché mi si disse essere ciò condizione alla eleggibilità senatoria."<sup>102</sup>

Storia Patria, 1991, pp. 31-60. Felice Chiò (1813-1871); matematico, fu professore all'Università di Torino.

<sup>100</sup> Cfr. P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2.

<sup>101</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° IX.

<sup>102</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 7.

E l'osservazione sulla "eleggibilità senatoria" quasi fosse un maldestro tentativo di accarezzare la vanità umana, susciterà l'ironica risposta di Genocchi il 27 gennaio:

"Essa [*sc.* la Società] ha sempre eletto i suoi presidenti e soci senza l'approvazione governativa, e voi mi parlate a questo proposito della *eleggibilità senatoria*. Confesso umilmente di non capire."<sup>103</sup>

Lo stesso Brioschi dovrà ammettere anni dopo che i timori sulle nomine non erano infondati e non si è trattato di una questione limitata alla prima scelta. Sella cercherà di risolvere i problemi che nascono nella cooptazione all'Accademia dei Lincei, accrescendo il numero dei soci.

Così Brioschi scriverà il 25 luglio 1883 a Cannizzaro:

"Non si può negare che egli [*sc.* Sella] ha giovato assai all'Accademia materialmente ma parmi che ora si accinga a sciuparla moralmente. E' mia antica opinione che il Sella non ha il senso scientifico e quindi vale più il lato materiale che morale; ma se siamo giunti a questi risultati il torto è un po' anche da nostra parte che mentre siamo convinti di non essere presieduti da uno scienziato continuiamo ad esserlo. E' quel maledetto miscuglio di politica e di scienza che guasta tutto. Credo che hai ragione nella questione speciale, ma per me è ancora più grande l'aumento a 55.

I santoni della Società dei 40 ridono e rammentandosi del mio tentativo di fusione si rivolgono ora a me per dirmi se lo riproporrei."<sup>104</sup>

E vi è tra Brioschi e Genocchi sintonia di intenti.

Genocchi scrive infatti a Sella il 10 ottobre 1883 per criticare la norma del nuovo statuto che amplia il numero dei soci stranieri "equiparandoli ai Nazionali".<sup>105</sup>

Ma Sella è impegnato tra l'altro in una lotta assai difficile contemporaneamente politica e culturale: l'apertura della classe di scienze naturali dell'Accademia dei Lincei ai medici sotto la spinta delle conquiste della patologia e del potente ministro (e valente patologo) Guido Baccelli<sup>106</sup>. Anche Scacchi lo osteggerà. Scrive infatti a Genocchi il 6 luglio 1883:

<sup>103</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° XI.

<sup>104</sup> Cfr. n. 88.

<sup>105</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° XXII.

<sup>106</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 16, n. 12.



“Se i Patologi e gli Agronomi hanno fatto lavori eccellenti nei rami di Scienze naturali delle quali si giova la Patologia e l’Agronomia, allora solo essi saranno eleggibili nelle rispettive sezioni di Scienze naturali; non bisognerà confondere la Scienza con l’Applicazione. Non è più tempo di reclutare i Naturalisti tra i Medici e gli Agronomi ed ammettendo costoro nell’Accademia dei Lincei si farebbe un regresso di mezzo secolo e si falsificherebbe la istituzione presente che ha il merito della schiettezza.”<sup>107</sup>

La Società d’altro canto non ha subito le influenze dei governi preunitari che pure l’hanno sostenuta finanziariamente.

“*Quod non fecerunt barbari fecerunt Barberini*. I governi di Francesco IV e di Francesco V rispettarono la Società fondata dal Lorgna e la lasciarono vivere indipendente e tranquilla. Non è una gran vergogna che il Governo Italiano abbia pensato e pensi a manometterla?”

così scrive Genocchi a Sella ancora il 13 gennaio 1875.<sup>108</sup>

Lo spirito di autonomia si rispecchia nella forma scelta da Lorgna<sup>109</sup> di società privata. Genocchi può allora adattare l’argomento di Stefano Marianini nella stessa lettera:

“Non m’intendo di organismi vitali e non vitali. I miei studi mi rendono più sollecito del rispetto dovuto alla proprietà e a tutti i diritti individuali. Perciò mi pare cosa enorme il voler trasformare in quel bislacco modo la Società dei XL con un semplice Decreto. Non si tratta del numero dei voti: il progetto a me pare semplicemente non proponibile. Almeno Mamiani quando intendeva sconvolgere la Società nostra ricorreva al Parlamento.”<sup>110</sup>

Stefano Marianini nel suo scontro con Mamiani presentò le sue dimissioni ai soci che le respinsero con 30 voti su 37 votanti.<sup>111</sup>

Sella memore del precedente sceglierà allora di non procedere direttamente ma di sentire a proposito della fusione prima il parere dei soci. Così nella ministeriale si dirà:

<sup>107</sup> Cfr. n. 84.

<sup>108</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° IX.

<sup>109</sup> Anton Mario Lorgna; cfr. *parte prima*, lettera n° 5, n. 2.

<sup>110</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° IX.

<sup>111</sup> Cfr. G. Penso, *Scienziati italiani*, cit. in n. 3.

“Ed infatti non solo se gli oppositori saranno in maggioranza, ma anche quando costituiscano una minoranza un po' ragguardevole, il Governo è così alieno da ogni pressione verso un Istituto come la Società dei Quaranta, che si limiterà a dare all'Accademia dei Lincei la trasformazione che valga ad allargare il campo anche alle scienze morali, storiche e filologiche, e a darle costituzione decisamente nazionale...”<sup>112</sup>

Le precauzioni non saranno sufficienti ad aprire la strada alla fusione, ma leniranno in parte gli animi e conterranno il dissidio.

“ Sarà stata questa una delle divergenze di opinioni come sempre ci sono tra gli uomini specialmente liberi, ma ciò non deve togliere la stima reciproca, ed al comune collaborare anche per vie diverse al progresso delle scienze.

Né diverso fu il proposito del Betti e del Brioschi.”

scrive infatti Sella il 18 gennaio 1875.<sup>113</sup>

E Genocchi risponde:

“ Accetto infine le vostre conclusioni sulle divergenze di pareri che non debbono togliere alla stima reciproca. Solo mi permetto di osservare riguardo al Brioschi da voi più volte nominato che la sua condotta come Presidente della Società dei XL non può essere lodata né difesa.”<sup>114</sup>

Ma se effettivamente, come è scritto ancora nella ministeriale:

“... il Governo non poteva certamente scordare che vi ha una Società la quale, oltre ad una gloriosa storia scientifica, ha il merito di essersi data costituzione nazionale quasi un secolo fa, allorquando cioè soltanto le fantasie più ardite potevano prevedere in lontano avvenire l'unità politica...”<sup>115</sup>

perché, avranno pensato in molti, non la potenza invece di assorbirla in un'altra?

Tuttavia molti soci, quelli più impegnati sul fronte politico, ritengono che bisognerà adeguarsi al cresciuto peso dello Stato; naturalmente per ottenere il sostegno di questo occorre cercare il consenso e pagare dei prezzi.

<sup>112</sup> Cfr. P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2.

<sup>113</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 7.

<sup>114</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° XI.

<sup>115</sup> Cfr. P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2.

Sella, delle cui capacità politiche è difficile dubitare, insieme con Betti e Bonghi sceglierà nello statuto della erigenda Società di non menzionare subito le risorse necessarie probabilmente per evitare opposizioni.

Genocchi avrà facile gioco ancora nella cruciale lettera del 13 gennaio a osservare:

“... e come si provvederà alla spesa?”<sup>116</sup>

commentando ferocemente: “*Quam parva sapientia!*”<sup>117</sup>

Su questo punto nulla ribatterà Sella il 18 gennaio.<sup>118</sup>

Ma Betti il 19 ribadisce a Genocchi l'intenzione del Governo di procedere in ogni caso:

“Quanto alla Società dei quaranta, avrete avuto la lettera Ministeriale, e faremo come in quella abbiamo detto.”<sup>119</sup>

Il costituirsi di due partiti, in queste circostanze, sul problema della fusione è inevitabile.

Il primo dicembre 1874 Sella dà il via al suo tentativo con un telegramma a Brioschi:

“Preme moltissimo deliberare intorno tua idea fusione Lincei e Società Quaranta. Telegrafami, se puoi venire presto a Roma colle carte relative o mandarmele.”<sup>120</sup>

Nella terza decade di dicembre egli comincerà a sollecitare gli amici e sembra assai ottimista sull'esito. Scrive così a Genocchi:

“Ond'è che agli uffici del Brioschi mi sono permesso di aggiungere anche i miei presso di voi e presso qualche amico.”<sup>121</sup>

Si apre allora un vasto dibattito epistolare che le ricerche di Ziliani nei fondi Sella e Genocchi ci consentono parzialmente di seguire.

Già il 24 dicembre Bellavitis prende contatti con Genocchi per segnalare la sua opposizione.<sup>122</sup>

<sup>116</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° IX.

<sup>117</sup> *Ibidem*.

<sup>118</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 7.

<sup>119</sup> La lettera è custodita presso la biblioteca Passerini Landi di Piacenza, fondo Genocchi ed è citata in P. Ziliani, *Quintino Sella presidente*, cit. in n. 5.

<sup>120</sup> Il telegramma è conservato a Milano presso la Biblioteca Centrale della Facoltà di Ingegneria del Politecnico, Fondo Brioschi. Il suo testo è presentato in G. Paoloni, *Francesco Brioschi e la questione dell'Accademia Nazionale*, cit. in n. 6.

<sup>121</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 5

Il 26 dicembre De Gasparis comunica a Sella la sua adesione al progetto.<sup>123</sup>

Il 29 dicembre Genocchi segnala direttamente a Sella il suo parere negativo.<sup>124</sup>

Il 3 gennaio Brioschi rispondendo a Sella, mostra ancora un certo ottimismo, e segnala in un Bellavitis, a suo parere, isolato il maggiore oppositore.<sup>125</sup>

Il 6 gennaio Bellavitis esorta Genocchi a sollecitare il sostegno dei colleghi alla loro azione.<sup>126</sup>

L'8 gennaio Menabrea scrivendo a Sella individua ancora in Bellavitis l'oppositore più accanito.<sup>127</sup>

Il 10 gennaio Sella riscrive a Genocchi.<sup>128</sup>

Il 12 gennaio Sismonda comunica al Sella la sua opposizione al progetto.<sup>129</sup>

Il 13 è Genocchi a rispondere a Sella.<sup>130</sup>

Nello stesso giorno Bellavitis riafferma a Sella le sue ragioni.<sup>131</sup>

Il 14 Boncompagni<sup>132</sup>, uno dei fondatori dell'Accademia pontificia dei Nuovi lincei, comunica a Genocchi l'appoggio di Chelini e Secchi e promette di sollecitare Betti.<sup>133</sup>

Il 14 stesso Genocchi scrive a Tardy lodando l'onestà e la sincerità di Sella che contrappone ai comportamenti di Brioschi.<sup>134</sup>

Ancora il 14 Bufalini, ormai agonizzante (morirà il 31 marzo), prega Finali<sup>135</sup>, ministro di Grazia, Giustizia e del culto, di arrestare il progetto di fusione.<sup>136</sup>

<sup>122</sup> Cfr. n. 98.

<sup>123</sup> La lettera è conservata a Biella presso la fondazione Sella, fondo Quintino Sella, ed è citata in P. Ziliani *Quintino Sella e la cultura napoletana*, cit. n. 5.

<sup>124</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° VII.

<sup>125</sup> Si veda n. 98.

<sup>126</sup> Si veda n. 119.

<sup>127</sup> Si veda n. 98.

<sup>128</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 6.

<sup>129</sup> Si veda n. 98.

<sup>130</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° IX.

<sup>131</sup> Si veda n. 98.

<sup>132</sup> Baldassarre Boncompagni; cfr. *parte prima*, lettera n° 12, n. 2.

<sup>133</sup> Si veda n. 98.

<sup>134</sup> La lettera è custodita nella Biblioteca universitaria di Genova, fondo Tardy, è citata in A. C. Garibaldi, *Sui rapporti scientifici tra Angelo Genocchi e placido Tardy*, in A. Conte- L. Giacardi (curatori) *Angelo Genocchi*, cit. in n. 99, pp. 281-292.

Il 16 gennaio Genocchi ribadisce a Sella<sup>137</sup> la sua ostilità.

Il 18 Sella si è ormai convinto che una "*minoranza ragguardevole*" si oppone al progetto e scrive a Genocchi che la fusione non si farà.<sup>138</sup>

Il 19 Betti ribadisce a Genocchi le intenzioni del governo.<sup>139</sup>

Il 20 Bellavitis riscrive a Genocchi.<sup>140</sup>

Il 22 Scacchi assicura al progetto il sostegno incondizionato suo, di Padula, di Palmieri, di Trudi.<sup>141</sup>

Il 27 Genocchi ribatte a Sella che "forse la maggioranza si è dichiarata contraria."<sup>142</sup>

Il 28 Sella precisa ancora qualche punto a Genocchi.<sup>143</sup>

Conclusosi il tentativo di fusione formale Sella si propone allora di arrivare ad una fusione di fatto inglobando nell'Accademia dei Lincei i membri della Società. Nell'Accademia vengono, a fine gennaio 1875, cooptati Scacchi, De Gasparis e Betti.

Ma per proseguire su questa strada occorre che strategia simile venga adottata dai Quaranta.

Dato il peso notevole del presidente nei processi di cooptazione in entrambi gli istituti scientifici, occorre assicurarsi una buona disposizione del presidente della Società che si va ad eleggere.

Sella ha individuato nel gruppo napoletano, che ha dato sostegno condizionato al progetto di fusione, un possibile alleato.

Il 28 gennaio scrive a Scacchi comunicandogli l'avvenuta cooptazione e il suo progetto di fusione di fatto rispettando "l'autonomia dei XL come vogliono alcune coscienze timorate", lo invita a Roma anche a nome di altri sette membri della Società

<sup>135</sup> Gaspare Finali (1829-1914); economista fu professore di contabilità dello Stato e varie volte ministro.

<sup>136</sup> Si veda n. 98.

<sup>137</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° X.

<sup>138</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 7

<sup>139</sup> Si veda n. 119.

<sup>140</sup> Si veda n. 119.

<sup>141</sup> Si veda n. 98.

<sup>142</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° XI

<sup>143</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 4.

(sono in complesso gli otto che hanno sottoscritto la lettera collettiva a favore del progetto) per prendere accordi sulla prossima elezione del presidente.<sup>144</sup>

Il 31 gennaio Scacchi dà il suo assenso all'incontro proposto.<sup>145</sup>

Lo statuto dell'Accademia dei Lincei viene riformato, il numero dei soci nazionali della classe di Scienze Naturali viene portato a 40, numero identico a quello dei membri della Società e si procede a nuove cooptazioni. Anche sul fronte dei contrari alla fusione fervono i contatti; il candidato prescelto come presidente è Bellavitis.

Il 4 febbraio Brioschi avverte Sella che contatterà i soci milanesi.<sup>146</sup>

Il 13 febbraio Schiaparelli scrive a Genocchi riaffermando la candidatura di Genocchi: chi propone lui stesso, dichiara, tenta di disperdere i voti.<sup>147</sup>

Il 15 Sella comunica a Genocchi l'avvenuta cooptazione nell'Accademia secondo il nuovo statuto.<sup>148</sup>

Il 16 Sella comunica a Brioschi l'esito dell'incontro con Scacchi: si è deciso di votare per questi come presidente della Società.<sup>149</sup>

Lo stesso giorno Bufalini scrive a Sella per chiarire le sue posizioni.<sup>150</sup>

Il 17 febbraio Bufalini scrive a Genocchi di aver votato per Bellavitis<sup>151</sup> e il giorno successivo gli riscrive comunicandogli notizie ricevute da Roma sulle intenzioni di Sella.<sup>152</sup>

Il 18 Genocchi prende tempo nell'accettare la cooptazione nell'Accademia, e chiede a Sella copia del nuovo statuto, accusa Scacchi di squallidi interessi economici, segnala le "arti indegne" con le quali si cerca di favorire la dispersione di voti.<sup>153</sup>

<sup>144</sup> Cfr. n. 98.

<sup>145</sup> Cfr. n. 98.

<sup>146</sup> Cfr. n. 98.

<sup>147</sup> Cfr. n. 119.

<sup>148</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 8.

<sup>149</sup> La lettera è conservata a Milano presso la Biblioteca Centrale della Facoltà di Ingegneria del Politecnico, Fondo Brioschi. Il suo testo è presentato in G. Paoloni, *Francesco Brioschi e la questione dell'Accademia Nazionale*, cit. in n. 6.

<sup>150</sup> Cfr. n. 98.

<sup>151</sup> Cfr. n. 119.

<sup>152</sup> Cfr. n. 119.

<sup>153</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° XII.

Il 19 Schiaparelli comunica a Sella di aver votato per Bellavitis, ma si dichiara d'accordo sulla fusione di fatto.<sup>154</sup>

Il 20 Sella risponde indignato alle affermazioni di Genocchi.<sup>155</sup>

Il 21 Stoppani comunica a Sella di aver votato per Bellavitis.<sup>156</sup>

Il 22 Bufalini suggerisce a Genocchi di accettare la nomina a membro dell'Accademia dei Lincei.<sup>157</sup>

Qualche giorno dopo Genocchi precisa a Sella il senso delle sue affermazioni del 18.<sup>158</sup>

La vittoria di Scacchi è di misura (1 voto) e decisa dalla dispersione dei voti.

Ma il progetto di fusione di fatto dell'Accademia e della Società non si realizza per le differenti dinamiche interne ai due istituti. Sella se ne lamenterà con Scacchi, ma inutilmente, il 6 giugno 1878.<sup>159</sup>

Nel 1881 Sella tenterà allora di percorrere nuovamente la strada della fusione formale scontrandosi con l'opposizione di Scacchi.<sup>160</sup>

Ma su entrambi questi tentativi l'epistolario Sella- Genocchi tace, pur essendo accertata l'opposizione attiva di quest'ultimo al progetto.<sup>161</sup>

Ancora qualche osservazione.

Vari soci insistono su un particolare aspetto economico: il destino del lascito Lorgna nel caso di una fusione. Sembra loro infatti impossibile usufruirne ancora nel caso in cui si arrivi a non ottemperare in maniera così vistosa alla volontà del testante.

<sup>154</sup> Cfr. n. 98.

<sup>155</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 9.

<sup>156</sup> Cfr. n. 98.

<sup>157</sup> Cfr. n. 119.

<sup>158</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° XIII.

<sup>159</sup> Cfr. n. 98; sull'intera questione si veda P. Ziliani, *Quintino Sella presidente*, cit. in n. 5.

<sup>160</sup> Sull'intera questione si vedano P. Ziliani, *Quintino Sella presidente*, cit. in n. 5 e G. Penso, *Scienziati italiani*, cit. in n. 3.

<sup>161</sup> L'opposizione di Genocchi si evince da una lettera di Beltrami a Sella del 27 luglio 1881 conservata nella fondazione Sella a Biella, fondo Quintino Sella e presentata da P. Ziliani in *Quintino Sella presidente*, cit. in n. 5.

L'argomento viene usato spesso collegandolo alla assenza nel progetto di fusione di chiare fonti di finanziamento per la nuova accademia, proprio per evidenziare la debolezza stessa del progetto.

Si tratta però di un falso argomento perché come chiarisce lo stesso Marianini:

“Questo dubbio [sc. il destino del legato Lorgna] è espresso nelle lettere di parecchi Soci (specialmente Bellavitis e Bufalini) che diedero voto contrario.

La Società italiana non poteva perdere il legato Lorgna per la semplice ragione che cessò di goderlo sin dall'inizio del secolo.”<sup>162</sup>

Alla base di esso è certamente una cattiva informazione e Genocchi, date anche le sue conoscenze di diritto, si astiene dall'utilizzarlo.

Un argomento invece che i fautori della fusione utilizzano spesso e volentieri si fonda sul fatto che a loro avviso la Società non è più “utile”.

Di Società che “aveva vissuto ma non aveva più ragione di essere” parla Brioschi scrivendo a Genocchi il 16 gennaio 1883.<sup>163</sup>

“Io non mi intendo di organismi vitali o non vitali” risponde Genocchi a Sella il 13 gennaio 1875<sup>164</sup>, rigettando l'idea di “organismo vitale” che Sella ha suggerito il 10.<sup>165</sup>

E' Schiaparelli a tirar fuori la fonte darwiniana dell'argomento. Scrive infatti il 19 febbraio 1875 a Sella accettando la nomina ad accademico linceo:

“Accetto con animo tranquillo ciò che non avrei potuto fare se i Lincei avessero persistito nel volersi divorare la Società dei XL.

La strada che ora hanno preso li condurrà al medesimo scopo senza far violenza all'opinione di alcuno. Io desidero che la loro Società prosperi secondo i loro voti e diventi veramente una Società nazionale. Se veramente si riuscirà ad ottenere questo, meno mi rincrescerà che la Società dei XL ceda alla legge della *Natural Selection* a cui purtroppo pare condannata ad obbedire.”<sup>166</sup>

Ma era effettivamente ben fondata l'accusa di scarsa vitalità?

Problemi naturalmente ve ne erano come già sottolineato.

<sup>162</sup> P. D. Marianini, *Annali*, cit. in n. 2.

<sup>163</sup> Cfr. n. 84.

<sup>164</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° IX.

<sup>165</sup> Cfr. *parte prima*, lettera n° 6.

<sup>166</sup> Cfr. n. 154.



Nel dare una risposta alla questione col senno di poi Penso sposa questa tesi: la Società è moribonda e perde una grande occasione. Il suo atteggiamento sembra però influenzato dal giudizio che egli dà sulle condizioni della Società negli anni settanta del Novecento.<sup>167</sup>

Paoloni riconosce invece che la posizione di Brioschi era piuttosto pessimistica e che la Società continuò a svolgere la sua azione.<sup>168</sup>

In effetti almeno fino alla prima guerra mondiale e dunque alla cesura che essa costituì, accelerando molti processi in maturazione, la Società senz'altro operò decorosamente. I presidenti che si succedettero, Scacchi, Cannizzaro, Cremona, Dini<sup>169</sup> assicurarono una regolare pubblicazione delle memorie, l'assegnazione dei premi e soprattutto cooptazioni di livello elevato, meno tempestose e chiacchierate di tante dei Lincei.

Le Accademie straniere continuarono a sollecitare i suoi pareri e la presenza di suoi rappresentanti nelle occasioni solenni.

Rimase però l'anomalia per l'Italia di due accademie nazionali scientifiche con un effetto di indebolimento, forse, del prestigio di entrambe e con una certa dispersione di risorse.

Con l'accademia lincea inoltre finiva col confliggere quella vaticana.

Si conclude qui la nostra analisi in attesa che nuovi punti di vista e nuovi documenti (vari fondi come quello Betti a Pisa, Cremona a Genova, Tardy ancora a Genova attendono di essere esaminati) la completino o la modifichino.

#### 4. ADDENDA ET CORRIGENDA

Raccogliamo in questo paragrafo alcune aggiunte da apportare alle note di accompagnamento ai testi dello scambio epistolare già edito e segnaliamo qualche

<sup>167</sup> Cfr. G. Penso, *Scienziati italiani*, cit. in n. 3.

<sup>168</sup> Cfr. G. Paoloni, *Francesco Brioschi*, cit. in n. 6.

<sup>169</sup> Ulisse Dini (1845-1918); matematico, fu professore all'Università di Pisa.

refuso di stampa. Al già citato nostro lavoro contenente i testi faremo riferimento come segnalato con la dizione *parte prima* seguita ora dal numero di pagina e, se necessario dal numero di rigo nella pagina della lettera considerata.

Per quanto concerne l'uso della lingua italiana in Sella (*parte prima*, p. 149) e il suo atteggiamento nei confronti del problema della lingua per la nazione di recente unificata va ricordato come egli esortasse i familiari ad utilizzare l'italiano e che riteneva dovesse nascere una lingua nuova, media tra i vari dialetti pur riconoscendo una certa superiorità al Toscano. Sul problema ebbe una accanita discussione nell'autunno del 1869 a Brusuglio con Manzoni, il cui avviso, naturalmente ben diverso e concentrato sulla necessità dell'uso di un fiorentino temperato, avrebbe finito col prevalere.

Sulla questione si può consultare il già citato *L'utopia di Quintino Sella* di Guido Quazza (capitolo 4, p. 69 e capitolo 18, pp. 511-512).

Per quanto concerne la lettera del 29 aprile 1861 (*parte prima*, p. 177) di Genocchi a Sella nella quale si fa menzione di Francesco Faà di Bruno va ricordato che la corrispondenza tra quest'ultimo e Genocchi è stata pubblicata con un ampio commento in L. Giacardi, *La scienza e la fede. Le lettere di Francesco Faà di Bruno ad Angelo Genocchi (1858-1884)*, Quaderni di Storia dell'Università di Torino, v. 1 (1996) pp. 207-246.

Per quanto concerne il testo della lettera di Sella a Genocchi del 7 giugno 1863 (*parte prima*, n° 2, p. 153) va segnalato un refuso di stampa; invece dell'espressione:

"Nel mandarvela [*sic*; ma probabilmente 'mandarmela']"

(*parte prima*, p. 154, r. 1), si deve leggere:

"Nel mandarmela [*sic*; ma probabilmente 'mandarvela']."

Per quanto concerne il testo della lettera di Genocchi a Sella del 27 gennaio 1875 (*parte prima*, n° XI, p. 185, r. 7) il nome non individuato e indicato con puntini racchiusi tra parentesi uncinate sembra ad un ulteriore esame corrispondere a quello di Frisiani che effettivamente votò contro la fusione dell'Accademia dei Lincei con la Società Nazionale.

La lettera di Sella a Genocchi del 28 gennaio 1874 (*parte prima*, n° 4) quasi certamente reca, apposta da Sella, una data erronea. Essa in effetti risponde ad una critica di Genocchi contenuta in una lettera datata 27 gennaio 1875 (*parte prima*, n° X) e di datazione più certa. E' assai probabile allora che la datazione effettiva sia 28

gennaio 1875 e che debba pertanto collocarsi tra la lettera n° 7 del 18 gennaio 1875 e la lettera n° 8 del 15 febbraio 1875.

Per quanto concerne il testo della lettera di Genocchi a Sella della fine di febbraio 1875 (*parte prima*, n° XIII, p. 189, r. 25) si deve leggere “ingegni” invece di “impegni”.

## 5. INDICE DEI NOMI CITATI NELL'EPISTOLARIO E NELLE NOTE AD ESSO

Nel presente elenco i numeri che seguono i singoli nomi si riferiscono alle pagine della *parte prima*.

Quando il numero è seguito dall'indicazione ‘n’ si deve intendere che il nome è menzionato in nota alla pagina indicata; quando il numero è seguito dall'indicazione ‘e n’ si deve intendere che il nome è menzionato sia nel testo, sia in nota alla pagina indicata; naturalmente se il numero non è seguito da indicazione si deve intendere che il nome è citato solo nel testo della pagina indicata.

Come è d'uso non vengono riportate le occorrenze né del nome di Quintino Sella né del nome di Angelo Genocchi.

Segnaliamo infine che sotto la forma, traslitterata dal russo, *Cebyšev* sono registrate anche le occorrenze della forma *Tchebicheff*.

Bacelli Guido, 170 n, 171 e n, 172 n, 196, 197.

Battaglini Giuseppe, 180 e n.

Bellavitis Giusto, 156 e n, 158 e n, 187 e n.

Betti Enrico, 159 e n, 160 e n, 162 e n, 183 e n.

Blaserna Pietro, 166 e n.

Boncompagni Baldassarre, 164 e n, 191 e n.

Bonghi Ruggiero, 162 e n.

Brioschi Francesco, 155 e n, 157 e n, 159, 178 n, 181 e n, 183 e n.  
Bufalini Maurizio, 158 e n, 159 e n.  
Camerini Eugenio Salomone, 177 e n, 178 n.  
Cannizzaro Stanislao, 170 e n, 172 e n.  
Carbone Luciano, 166 n.  
Casorati Felice, 160 e n, 161 e n, 189 e n.  
Cebyšev Pafnutij L'vovic, 169 e n.  
Chelini Domenico, 158 e n.  
Cicerone, 167 n.  
Cornalia Emilio, 160 e n, 161 e n, 189 e n.  
Cremona Luigi, 166 e n.  
D'Ovidio Enrico, 194 e n.  
De Gasparis Annibale, 160 e n.  
De Sanctis Francesco, 178 e n.  
Faà di Bruno Francesco, 177 e n.  
Felici Riccardo, 160 e n.  
Ferrati Camillo, 174 e n.  
Ferrero Annibale, 193 e n.  
Francesco IV d'Austria – Este, 182 e n.  
Francesco V d'Austria – Este, 182 e n.  
Fuchs Lazarus, 169 e n.  
Garreri, 178 n.  
Gatto Romano, 166 n.  
Gastaldi Bartolomeo, 160 e n, 181 e n.  
Haynald Lajos, 173 e n.  
Helmholz Hermann Ludwig Ferdinand von, 170 e n.  
Hermite Charles, 169 e n, 173 e n, 197 e n.  
Jordan Camille, 169 e n.  
Kennedy Hubert C., 166 n.  
Klein Felix, 169 e n.  
Kronecker Leopold, 169 e n.  
Lie Sophus, 169 e n.

Lombardini Elia, 158 e n, 189 e n.  
Lorgna Anton Mario, 155 n, 159 e n, 182, 183 n, 186 e n, 189 e n.  
Mamiani della Rovere Terenzio, 178 e n, 182 e n.  
Marianini Pietro Domenico, 161 e n, 183 e n, 189 e n.  
Meneghini Giuseppe Giovanni Antonio, 160 e n.  
Minich Serafino Raffaele, 194 e n.  
Minghetti Marco, 157 n.  
Mosso Angelo, 172 e n.  
Napoleone III, 168 n.  
Padula Fortunato, 185 e n.  
Palladino Franco, 166 n.  
Palmieri Luigi, 185 e n.  
Parlatore Filippo, 160 e n.  
Penso Giuseppe, 155 n.  
Perrier François, 173 e n, 197 e n.  
Plana Giovanni, 171 e n.  
Quazza Guido, 157 n.  
Ricci Lorenzo, 156 n.  
Ricotti Ercole, 193 e n.  
Saint Robert Paolo di, 153 e n, 174 e n, 180 e n.  
Sainte Claire Deville Henri, 174 e n, 198 e n.  
Santini Giovanni, 185 e n.  
Scacchi Arcangelo, 160 e n, 161 e n, 173 e n, 185 e n, 188 e n.  
Schiaparelli Giovanni Virgilio, 160 e n, 185 e n.  
Schläfli Ludwig, 169 e n.  
Sclopis Federico Paolo, 171 e n.  
Secchi Angelo, 158 e n.  
Sismonda Angelo, 185 e n.  
Sylvester James Joseph, 169 e n.  
Tardy Placido, 185 e n.  
Thiers Adolphe, 168 n.  
Trudi Nicola, 186 e n.

Turazza Domenico, 158 e n, 160 e n.

Umberto I, 197 n.

Urbano VIII, 182 n.

Weierstrass Carl, 169 e n.

Ziliani Pietro, 188 n.

## 6. ELENCO DELLE OPERE CITATE NELLA PARTE PRIMA E NELLA PARTE SECONDA

*Alle origini dell'Italia industriale*, Napoli, Guida, 1974.

G. ARE, *Il problema dello sviluppo economico dell'Italia nel pensiero e nell'opera di Quintino Sella*, in *Alle origini dell'Italia industriale*, Napoli, Guida, 1974, pp. 167-254.

F. BARTOCCINI, *Quintino Sella e Roma: idea, mito e realtà* in *Quintino Sella tra politica e cultura*, pp. 245-265.

E. BETTI – F. BRIOSCHI, *Gli Elementi di Euclide con note, aggiunte ed esercizi ad uso de' Ginnasi e de' Licei*, Firenze. Le Monnier, 1867-1868.

*Bibbia, versione greca del Vecchio Testamento detta dei Settanta (Septuaginta).*

U. BOTTAZZINI, *Angelo Genocchi e i principi del calcolo*, in A. Conte- L. Giacardi (curatori) *Angelo Genocchi*, pp. 31-60.

E. CANTARELLA, *Brioschi e la questione ferroviaria*, in C. G. Lacaita- A. Silvestri (curatori), *Francesco Brioschi*, pp. 371-402.

L. CARBONE – R. GATTO – F. PALLADINO, *L'epistolario Cremona – Genocchi (1860 – 1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*, Firenze, Olschki, 2001.

L. CARBONE – R. GATTO, *Il carteggio del Fondo Siacci della Biblioteca del Dipartimento di Matematica "Renato Caccioppoli" dell'Università "Federico II" di Napoli*, "Nuncius", v. XII (1997), pp. 443-446.

L. CARBONE-G.CARDONE-J.CASANOVAS-S.MANCUSO-F.PALLADINO, *La sede storica degli studi superiori di matematica a Napoli nella sua attuale configurazione*, Rendiconto dell'Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, s. IV, v. LXV (1997), pp. 31-66.

L. CARBONE- G. CARDONE- L. FAELLA, *L'epistolario Genocchi-Sella (1851-1883). Parte prima: i testi*, Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, s. IV, v. LXVIII (2001), pp. 147-201.

U. CASSINA, *Alcune lettere e documenti inediti sul trattato di Calcolo Genocchi – Peano*, “Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze Matematiche”, v. LXXXV (1950), pp. 337-362.

U. CASSINA, *L'area di una superficie curva nel carteggio inedito di Genocchi con Schwarz e Hermite*, “Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Scienze Matematiche e Naturali”, v. LXXXIII (1950), pp. 311-328.

M. T. CICERONE, *De officiis*.

A. Conte – L. Giacardi (curatori), *Angelo Genocchi e i suoi interlocutori scientifici. Contributi dall'epistolario*, Torino, Deputazione subalpina di Storia patria, 1991.

C. DIONISOTTI, *Ricordo di Quintino Sella*, “Rivista Storica Italiana”, v. XCVII (1985), pp. 5-41.

E. D'OVIDIO, *Discorso pronunciato in occasione dello scoprimento del busto in marmo di Genocchi nella sede dell'Accademia delle Scienze di Torino in Onoranze di A. Genocchi*, pp. 1090-1106.

C. FARINELLA, *L'accademia repubblicana. La Società dei Quaranta e Anton Mario Lorgna*. Milano, Franco Angeli, 1993.

L. FENOGLIO, *L'epistolario di Angelo Genocchi. Schedatura*, in A.Conte – L. Giacardi (curatori), *Angelo Genocchi*, pp. 303-393.

A. GALANTE GARRONE, *L'epistolario di Quintino Sella. Volume I in Quintino Sella tra politica e cultura*, pp. 167-178.

R. GATTO, *Lettere di Luigi Cremona a Enrico Betti (1860-1890)*, in Menghini (curatrice), *Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, v. III, pp. 7-90.

R. GATTO, *Storia di una anomalia. Le facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'unità d'Italia e la riforma Gentile. 1860-1923*, Napoli, Fridericiana Editrice Universitaria 2000.

A. GENOCCHI, *Intorno ad una trasformazione di un'equazione a tre variabili*, "Giornale di Matematiche", v. V, (1867) pp. 106-109.

A. GENOCCHI, *Sopra la pubblicazione fatta da B. Boncompagni di undici lettere di Luigi Lagrange a Leonardo Eulero. Osservazioni di Angelo Genocchi*. "Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche", v. X (1877), pp. 657-667.

A. GENOCCHI, *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale pubblicati con aggiunte del Dr. Giuseppe Peano*, Torino, Fratelli Bocca, 1884.

L. GIACARDI, *La scienza e la fede. Le lettere di Francesco Faà di Bruno ad Angelo Genocchi (1858-1884)*, Quaderni di storia dell'Università di Torino, v. 1 (1996), pp. 207-246.

L. GIACARDI, *Angelo Genocchi*, in C.S. Roero (curatrice), *La Facoltà di Scienze*, t. II, pp. 461-467.

A. GUICCIOLI, *Quintino Sella*, 2 voll., Rovigo 1888-1889, ma Biella, Libreria Vittorio Giovannacci, 1988, ristampa anastatica.

G. ISRAEL, *Su una corrispondenza fra B. Boncompagni e A. Genocchi*, in A.Conte -- L. Giacardi (curatori), *Angelo Genocchi*, pp. 293-30.

H. C. KENNEDY, *Peano. Storia di un matematico*. Torino, Boringhieri, 1983.

C. G. LACAITA, *Istruzione e sviluppo economico in Quintino Sella*, in *Quintino Sella tra politica e cultura*, pp. 191-212.

C. G. Lacaita – A. Silvestri (curatori), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897). I. Saggi*, Milano, Franco Angeli, 2000.

T. MAMIANI DELLA ROVERE, *Questione della Società italiana delle Scienze detta dei Quaranta*, Torino, Tipografia eredi Motta, 1861.

M. Menghini (curatrice) *Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani. La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, v. III, Quaderni P.R.I.S.T.E.M., Università Bocconi, Milano n. 9, Palermo 1996.

*Onoranze di A. Genocchi*, "Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino", v. XXVII (1891-1892).



F. PARLAMENTO, *Quintino Sella* in C.S. Roero (curatrice), *La Facoltà di Scienze* t. II, pp. 477-482.

G. PEANO, *Angelo Genocchi*, "Annuario della Regia Università di Torino", 1889, pp. 195-202.

G. PENSO, *Scienziati italiani e unità d'Italia. Storia dell'Accademia Nazionale dei XL*, Roma, Bardi 1978.

G. e M. QUAZZA, *Epistolario di Quintino Sella*, Roma, Istituto per la Storia del Risorgimento, Vol. I, II, III, IV, V, 1980-.

G. QUAZZA, *L'utopia di Quintino Sella. La politica della scienza*, Torino, Comitato di Torino dell'Istituto per la Storia del Risorgimento Italiano, 1992.

*Quintino Sella. Giornata lineea indetta in occasione del I centenario della morte (Roma 26 maggio 1984)*, "Atti dei Convegni Lincei", v. 64, Roma, Accademia Nazionale dei Lincei, 1984.

*Quintino Sella tra politica e cultura 1827-1884*, Atti del Convegno nazionale di studi, Torino, Palazzo Carignano, 24-26 ottobre 1984.

*Quintino Sella, 1827-1884. Catalogo della mostra documentaria*, Vercelli, Tipografia Gallo, 1984.

F. RAGUSO-M.D'AGOSTINO, *Arcangelo Scacchi. Pietra miliare: cristallografia, mineralogia, vulcanologia*, Gravina in Puglia, s. e., 1993.

G. RIGAULT DE LA LONGRAIS, *La figura scientifica di Quintino Sella*, in *Quintino Sella. Giornata lineea*, pp. 16-26.

C. S. Roero (curatrice), *La Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche, Naturali di Torino 1848-1998*, Torino, Deputazione subalpina di Storia Patria, 1999.

A. SCACCHI, *Notizia*, Memorie della Società italiana delle Scienze, s. III, t. II (1869-1876), p. LXIII.

A. SCACCHI, *Notizie storiche della Società italiana delle Scienze*, Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle Scienze, s. III, t. V (1882), pp. 17-73.

L. Sella (curatore), *Cronologia* in *Quintino Sella 1827 - 1884*, pp. 165-177.

Q. SELLA, *Discorsi parlamentari di Quintino Sella raccolti e pubblicati per deliberazione della Camera dei Deputati*, Roma, Tipografia della Camera dei Deputati, v. I, 1887; v. II, 1888; v. III, 1888; v. IV, 1889; v. V, 1890.

F. SIACCI, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, "Memorie della Regia Accademia delle Scienze di Torino", s. II, v. XXXIX (1889), pp. 463-495.

P. D. STEFANINI, *Annali della Società italiana delle Scienze fondata da Anton Mario Lorgna, continuate dal Segretario Amministratore di essa dal 1° marzo 1868 al 16 aprile 1875*, Memorie della Società italiana delle Scienze, s. III, t. II (1869-1876), pp. VII-XXXI.

P. C. TACITO, *Annales ab excessu divi Augusti*.

P. ZILIANI, *Quintino Sella presidente dell'Accademia dei Lincei e la Società italiana delle scienze. Analisi di una corrispondenza inedita (1874-1884)*, "Bollettino storico per la provincia di Novara", v. LXXXVI (1995), pp. 423-475.

P. ZILIANI, *Francesco De Sanctis e la riforma scolastica del 1861. Sette lettere inedite a Quintino Sella*, "Rassegna storica del Risorgimento", v. LXXXV (1998), pp. 291-308.

P. ZILIANI, *Quintino Sella e la cultura napoletana. I Lincei nell'Archivio della Fondazione Sella*, Napoli, Vivarium, 2000.



Figura 1 – Angelo Genocchi



Figura 2 – Quintino Sella

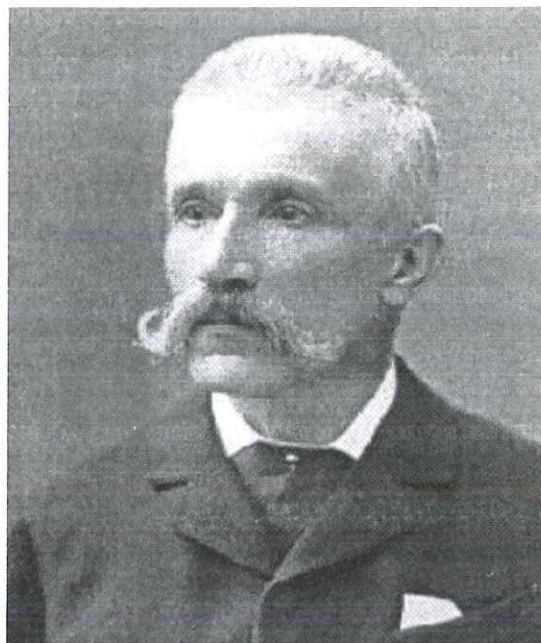


Figura 3 – Francesco Brioschi



Figura 4 – Arcangelo Scacchi



Figura 5 – Anton Mario Lorgna



## Degrado chimico del calcestruzzo di cemento per reazione alcali-carbonato

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 15 Novembre 2002)

**Riassunto** - Viene preso in esame un processo di degrado del calcestruzzo di cemento, determinato da una reazione fra alcali presenti nel fluido dei pori della pasta di cemento ed elementi di rocce dolomitiche, talvolta impiegati come aggregato.

Viene illustrato un coerente meccanismo di reazione, specificati i prodotti di neoformazione, giustificato il fenomeno espansivo al lume delle teorie avanzate in letteratura, descritte le modalità per una corretta attribuzione del degrado alla reazione alcali-carbonato, piuttosto che ad altri processi ed indicate le metodologie idonee a valutare la potenziale reattività dell'aggregato ed a minimizzare il fenomeno.

*Parole chiave:* Calcestruzzo di cemento; aggregati dolomitici; reazione alcali-carbonato.

**Summary** - The chemical decay of cement concrete, owing to a reaction between alkalis in the pore fluid of the cement paste and fragments of dolomitic rocks sometimes employed as aggregate, is examined.

It has been pointed out a consistent reaction mechanism, described the reaction products, explained the expansion in the light of the theories proposed in the literature, outlined the ways for a proper attribution of the phenomenon to alkali-carbonate reaction, rather than to other deterioration processes, reported suitable methods for evaluating the potential reactivity of the dolomitic aggregates and for minimizing the decay.

*Key words:* Cement concrete; dolomitic aggregates; alkali-carbonate reaction.

In una precedente nota (1) è stato preso in esame il degrado di strutture in calcestruzzo di cemento, addebitabile ad una reazione fra gli alcali ed alcune forme di silice reattiva, talvolta presenti negli aggregati, puntualizzando i principali fattori che la promuovono ed indicando modalità idonee a prevenirla.

Meno ben conosciuta, anche perché meno comune, è un'altra reazione da parte degli alcali, anch'essa espansiva e distruttiva, non collegabile, però, alla presenza di silice reattiva, bensì a quella del carbonato di rocce dolomitiche, parimenti impiegabili come aggregato.

La reazione alcali-dolomite, denominata in letteratura reazione alcali-carbonato, fu segnalata per la prima volta nel 1957 (2) ed attribuita, in un primo momento, alla scarsa resistenza dell'aggregato al gelo-disgelo.

Fu poi notato che alcuni aggregati dolomitici, che avevano superato le prove tecniche previste per accertare la resistenza al gelo-disgelo, in contatto con un cemento ad alto tenore di alcali, provocavano ugualmente espansione del calcestruzzo.

Si ebbe così sentore, per la prima volta, dell'esistenza di una reazione espansiva e fessurativa alcali-carbonato, completamente diversa da quella descritta da Stanton (3), che, a differenza di quest'ultima, procede ben più lentamente ma indefinitamente, se il liquido interstiziale si rinnova, provocando sensibili inconvenienti.

Da quella data sono stati segnalati parecchi casi di reattività alcali-carbonato da parte di rocce dolomitiche di differenti aree geografiche, particolarmente in USA, Canada, e, più recentemente, in Cina.

Caratteristica degna di nota è la similitudine di composizione e tessitura di tali rocce reattive, nonostante l'appartenenza ad aree geografiche differenti (4). Tutte sono dolomitiche, argillose, a grana assai fine, con cristalli romboedrici di dolomite dispersi in un letto di argilla e calcite finemente diffusa e denunziano, in generale, qualità che le rendono idonee all'impiego come aggregato per calcestruzzo: basso adsorbimento, alto peso specifico, ecc.

Osservata sul campo, la deleterea reazione si manifesta con un'espansione accompagnata da una mappa di fessurazioni, maggiormente evidenti quando il manufatto viene a trovarsi in ambiente umido ed è favorita dalla porosità della roccia, dalla presenza di minerali delle argille, di gesso, con solfato ed alcali transitoriamente coinvolti in reazioni intermedie.

Indipendentemente dalle caratteristiche specifiche della roccia, l'espansione aumenta con il contenuto di ioni ossidrilici nei pori della pasta di cemento, con l'acqua, con la temperatura ed il tempo.

Nonostante il numero di ricerche espletate sin dagli inizi degli anni '60 (5), il meccanismo della reazione non è ancora pienamente interpretato. Varie ipotesi sono state avanzate per far luce sul comportamento di rocce dolomitiche reattive verso gli alcali, ipotesi che coinvolgono meccanismi chimici, meccanici, osmotici.

Un meccanismo di rigonfiamento osmotico sembra il più verosimile, secondo, due teorie.

L'una (6) attribuisce l'espansione e la conseguente fessurazione alla pressione per rigonfiamento, che si genera per effetto dell'adsorbimento di umidità da parte dei costituenti più fini, soprattutto della frazione argillosa, che accompagnano la roccia reattiva, o da parte dei silicati a struttura a strati. Alcune dolomie che generavano significative espansioni a seguito di rigonfiamento, hanno rivelato neoformazione pressochè trascurabile di gelo di silice, componente comune nella reazione alcali-silice, mentre la microscopia



elettronica ha posto in luce una certa espansione del reticolo ed una esfoliazione di alcuni silicati a struttura a strati (7).

L'altra ipotesi (8) attribuisce espansione e fessurazione alla neoformazione, crescita e riorganizzazione di cristalli di brucite assai minuti, la maggior parte di essi di dimensioni inferiori ad  $1\ \mu\text{m}$ , i quali includerebbero numerosi vuoti. Tali cristalli rimarrebbero confinati nel ristretto spazio in cui decorre la reazione (all'interfaccia fra romboedri di dolomite e circostante matrice cementizia) (9).

La crescita confinata di uno strato di brucite e calcite fine, occupando uno spazio maggiore di quello lasciato dalla dolomite reagita, originerebbe una pressione di cristallizzazione, dovuta alla riduzione dell'energia libera di reazione di Gibbs (10), dando luogo all'espansione.

Non è da escludere che i meccanismi proposti nelle due teorie siano entrambi coinvolti nell'espansione delle rocce dolomitiche che risultano reattive verso gli alcali.

Concordanza di opinioni si registra invece sul fatto che laddove si constata espansione del calcestruzzo si sviluppa anche una reazione di decomposizione della dolomite: una dedolomitizzazione, che, poiché avviene con diminuzione di volume, ha richiesto la formulazione delle due teorie che giustificano il lamentato fenomeno espansivo.

La dedolomitizzazione decorre con un'intensità che è anche funzione delle caratteristiche petrografiche della roccia: porosità, tessitura, dimensione dei grani, percentuale di residuo insolubile (specie minerali delle argille, ma anche quarzo, feldspati, ecc.).

La possibilità che le dolomie possano reagire con soluzioni alcaline è nota da tempo (5).

E' stata avanzata l'ipotesi (11) che la dedolomitizzazione decorra secondo una successione di due fasi:

- 1)  $\text{CaMg}(\text{CO}_3)_2 + 2\text{MeOH} = \text{Mg}(\text{OH})_2 + \text{CaCO}_3 + \text{M}_2\text{CO}_3$ ;
- 2)  $\text{M}_2\text{CO}_3 + \text{Ca}(\text{OH})_2 = \text{CaCO}_3 + 2\text{Me}(\text{OH})$ .

$\text{Me} = \text{Na}^+, \text{K}^+, \text{Li}^+$ .

Secondo tale meccanismo, l'alcali rigenerato nella soluzione dei pori della pasta di cemento, svolgerebbe in effetti un ruolo di catalizzatore e la dedolomitizzazione sarebbe una reazione fra dolomite e calce (12).

E' stato osservato (12) che la reazione alcali-dolomite non sempre segue il meccanismo schematico in due tempi, che ha trovato più numerosi sostenitori.

L'alcali non agirebbe da semplice catalizzatore, ma avrebbe un ruolo determinante sulla natura delle fasi di neoformazione. Come risultato dell'attacco da parte degli alcali si formerebbero brucite e calcite o brucite e pirssonite ( $\text{Na}_2\text{Ca}(\text{CO}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ), a seconda delle relative attività degli ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Ca}^{++}$  presenti nella soluzione alcalina.

La reazione rifletterebbe sostanzialmente la variazione dell'equilibrio di dissoluzione della dolomite sotto l'azione degli ioni ossidrilici. In assenza

assoluta di alcali ed in contatto con la calce, la dedolomitizzazione sarebbe poco intensa, a seguito della limitata solubilità di quest'ultima, pur potendo proseguire per lunghi periodi se si rinnova il liquido interstiziale.

In presenza di alcali e senza apporto di calce, la fase stabile sarebbe la pirssonite. In presenza simultanea di alcali e di ioni calcio, le fasi di neoformazione dipenderebbero dal rapporto  $[Ca^{++}]/[Na^+]^2$ . Valori alti di tale rapporto favorirebbero la cristallizzazione di brucite e calcite, valori più bassi, quella di brucite e pirssonite.

E' stato però puntualizzato (5) che idrossido di calcio e pirssonite si formerebbero in condizioni molto severe, ciò che suggerirebbe la loro esclusione dai prodotti di reazione che si originano in condizioni ordinarie.

A temperatura ambiente, con aggregati di idonea granulometria e pH intorno a 13, il meccanismo proposto (11) sembrerebbe pertanto appropriato a descrivere il decorso della reazione.

Ogni aggregato dolomitico sarebbe reattivo in ambiente ricco di ioni  $OH^-$ . Nel calcestruzzo, essi alimenterebbero la reazione di dedolomitizzazione, mentre gli ioni  $CO_3^{2-}$  reagirebbero con la portlandite per formare calcite.

Entità e velocità di reazione dipenderebbero dal pH della soluzione. Più alti i valori di pH, più alte entità e velocità di dedolomitizzazione. Con pH inferiori a 12, la reazione procederebbe assai lentamente e potrebbe anche non aver luogo. L'espansione seguirebbe il medesimo andamento (13).

La via più indicata per minimizzare il degrado del calcestruzzo sarebbe dunque una significativa riduzione del pH della soluzione dei pori della pasta di cemento che ingloba gli aggregati dolomitici, ciò che viene favorito dall'impiego di un cemento a tenore di  $Na_2O$  eq. non superiore a 0,6%.

Per attribuire con sicurezza la reazione espansiva al decorso di una reazione alcali-carbonato, piuttosto che ad altri processi simili di degrado, viene consigliato l'esame petrografico del calcestruzzo. Non sempre risulta rilevabile la presenza di brucite intorno all'aggregato. Più sicuro è il rilevamento della presenza di strati di prodotti di reazione, depositatisi all'interfaccia fra romboedri di dolomite e matrice cementizia, attraverso un accurato esame petrografico di provini di calcestruzzo fessurato, convenientemente campionati.

L'esame petrografico dell'aggregato dolomitico prima dell'impiego ed appropriate prove standard codificate dalle Norme, costituiscono la necessaria premessa per valutare la sua reattività potenziale ed evitare espansione e fessurazione della struttura.

In letteratura sono riportate prove espletate su provini di roccia secondo la Norma ASTM C 586, con la sola variante dell'impiego di una soluzione 1N di KOH alla temperatura di 80°C (10). Termine di riferimento un campione non reattivo.

Sono state altresì condotte prove su microbarre di calcestruzzo 10x10x40 e 20x20x60 mm., preparate con cemento a basso tenore di alcali (10), stagionate a 40°C e 100% R.H. per alcuni mesi, o in autoclave a 150°C per 12 ore.

Quest'ultima metodologia risulterebbe applicabile e pratica e ben correlabile con i dati ottenuti con la procedura ordinaria.

La potenziale reattività di rocce di alcune formazioni geologiche canadesi (14) è stata valutata sia con una prova accelerata su barre di malta (prova sud Africana, metodo NBRI), sia su barre di malta secondo la Norma ASTM C 227, impiegando come prova di riferimento quella su prismi di calcestruzzo. Mediante la prova accelerata NBRI, è stato posto in luce che, in generale, aggregati con meno del 6% di residuo insolubile, o che producono un'espansione minore del 0,1% dopo 14 giorni, possono esser considerati non reattivi ed impiegabili per calcestruzzo.

Aggregati con più del 6% di residuo insolubile, e che producono dopo 14 giorni un'espansione superiore al 0,1%, devono esser considerati reattivi. Valori di espansione dopo 14 giorni superiori al 0.25% devono esser considerati reattivi con alta probabilità.

Il metodo NBRI risulta ben riproducibile ed ha posto in luce che l'espansione cresce con il rapporto acqua/ cemento, con la concentrazione della soluzione alcalina di attacco e con la temperatura della stessa (14).

È stato recentemente proposto un nuovo metodo accelerato che, seguendo le condizioni sperimentali indicate dagli sperimentatori (15), darebbe risultati paragonabili a quelli ottenuti con altri metodi, dopo un periodo di quattro settimane alla temperatura di 80°C.

Tenuto conto che la condizione che sostanzialmente promuove il processo di dedolomitizzazione è rappresentata da un contenuto sufficientemente alto di idrossido nel fluido dei pori della pasta di cemento, per minimizzare il rischio di un degrado del calcestruzzo conviene adottare tutte le misure che concorrono ad abbassarne il contenuto. Fra queste:

- 1) l'impiego di un cemento a basso tenore di alcali, come già sottolineato;
- 2) l'impiego di un cemento al solfoalluminato o quello, molto simile, di scoria soprasolfatato (16), nei quali il prodotto principale d'idratazione è il solfoalluminato di calcio, stabile però fino a circa 50°C;
- 3) incorporare un notevole volume di aggiunte minerali: quali ceneri volanti, scorie d'alto forno, fumo di silice, in un calcestruzzo di cemento Portland a basso tenore d'alcali (0.6%  $\text{Na}_2\text{O}$  eq.);

E' stato anche proposto di far uso di additivi chimici, quali: carbonato di litio, cloruro ferrico, i quali determinano una sensibile riduzione dell'espansione del calcestruzzo (4), anche se non totale.

Fra gli additivi chimici, il cloruro ferrico, disciolto nell'acqua d'impasto, sembra il più indicato (4), in concentrazioni fra 3,5 e 7% in peso, sia sotto il profilo del costo, sia sotto quello della tutela del comportamento meccanico della struttura. Restano, però, da approfondire alcuni problemi: l'accelerazione della presa del calcestruzzo di cemento che l'impiego di cloruro ferrico promuove ed i suoi possibili riflessi sulle armature in acciaio.

### BIBLIOGRAFIA

- (1) Sersale R. La reazione alcali-silice e l'attacco solfatico interno: due ulteriori cause di degrado chimico del calcestruzzo di cemento. *Rend.Acc.Sci. Fis. e Mat., Napoli*, LXVIII, 119-127 (2001).
- (2) Swenson E.G. A reactive aggregate undetected by ASTM test. *Proc. Amer. Soc. Testing Mat., Bull.* 226, 48-51 (1957).
- (3) Stanton D.E. The expansion of concrete through reaction between cement and aggregate. *Proc. Amer. Soc. Testing Mat.*, 43, 199 (1943); 48, 1055 (1948).
- (4) Pagano M.A., Cady P.D. A chemical approach to the problem of alkali-reactive carbonate aggregates. *Cement Concr. Res.*, 12, 1-12 (1982).
- (5) Milanesi C.A., Marfil S.A., Batic O.R., Maiza P.J. The alkali-carbonate reaction and its reaction products. An experience with argentinean dolomitic rocks. *Cement Concr. Res.*, 26, 10, 1579-1591 (1996).
- (6) Gillott J.E. Mechanism and kinetics of expansion in the alkali-carbonate rock reaction. *Canadian Journ. Earth Sci.*, 1, 121-145 (1964).
- (7) Diamond S. A review of alkali-silica reaction and expansion mechanisms. 2. Reactive aggregates. *Cement. Concr. Res.* 6, 549-560 (1976).
- (8) Tang M., Liu Z., Han S., Mechanism of alkali-carbonate reaction. Concrete alkali-carbonate reactions. *Proc. 7<sup>th</sup> Int. Conf. Ottawa, Canada*, 275-279 (1986).
- (9) Tong L., Tang M. Correlation between reaction and expansion of alkali-carbonate reaction. *Cement Concr. Res.*, 25, 3, 470-476 (1995).
- (10) Deng M., Han S., Lu Y., Lan X., Hu Y, Tang M. Deterioration of concrete structures due to alkali-dolomite reaction in China. *Cement Concr. Res.*, 23, 5, 1040-1046 (1993).
- (11) Hadley D.W. Alkali-reactivity of carbonate rocks. Expansion and dedolomitization. *Proc. Highway Research Board*, 40, 462-474 (1964).
- (12) Prince W., Perami R., Espagne M. Une nouvelle approche du mecanisme de la reaction alcali-carbonate. *Cement Concr. Res.*, 24, 1, 62-72 (1994)
- (13) Deng M., Tang M. Mechanism of dedolomitization and expansion of dolomitic rocks. *Cement Concr. Res.*, 23, 6, 1397-1408 (1993).
- (14) Fournier B., Bèrubè M.A. Application of the NBRI accelerated mortar bar test to siliceous carbonate aggregates produced in the St. Lawrence Lowlands (Quebec, Canada). Part 1. Influence of various parameters on the test results. *Cement Concr. Res.*, 21, 5, 853-862 (1991). Part 2. Proposed

- limits, rates of expansion and microstructure of reaction products. *Cement Concr. Res.*, 21, 6, 1069-1082 (1991).
- (15) Xu Z., Lan X., Deng M., Tang M. A new accelerated method for determining the potential alkali-carbonate reactivity. *Cement Concr. Res.*, 32, 6, 851-857 (2002).
- (16) Deng M., Tang M. Measures to inhibit alkali-dolomite reaction. *Cement Concr. Res.*, 23, 5, 1115-1120 (1993).



**Il fondo di antichi libri scientifici  
del Dipartimento di Matematica e Applicazioni  
della "Federico II" di Napoli: Cataloghi ragionati**

Nota di Luciano Carbone<sup>\*</sup>, Romano Gatto<sup>\*\*</sup>, Franco Palladino<sup>\*\*\*</sup>,  
Nicla Palladino<sup>\*\*\*\*</sup>

Presentata dal Socio Luciano Carbone  
(Adunanza del 6 dicembre 2002)

*Key words:* libri antichi, cataloghi.

**Summary** - In this work we give the catalogues of ancient scientific books collection of *Dipartimento di Matematica e Applicazioni* of the *Università di Napoli "Federico II"*.

**Sommario** - In questa nota diamo i cataloghi del fondo di antichi libri scientifici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli.

---

<sup>\*</sup> L. Carbone, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II". E-mail: carbone@biol.dgbl.unina.it.

<sup>\*\*</sup> R. Gatto, Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi della Basilicata. E-mail: gatto@unibas.it.

<sup>\*\*\*</sup> F. Palladino, Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Salerno. E-mail: fpalladino@unisa.it.

<sup>\*\*\*\*</sup> N. Palladino, Dottorato in Matematica Applicata e Informatica, Consorzio delle Università di Napoli "Federico II", Napoli II, Salerno, Catania, Palermo. E-mail: sapienz@libero.it

## 1. INTRODUZIONE

In una nota precedente<sup>1</sup> è stata descritta la costituzione del cospicuo fondo di libri, risalente ai secoli XVI, XVII e XVIII, che si trova nel Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università "Federico II" in Napoli. E' stato così messo in luce come esso si basi essenzialmente sulla collezione Govi-Davis<sup>2</sup>.

In questa nota presentiamo i cataloghi ragionati di tali libri, alcuni elenchi e un repertorio. Si tratta, specificamente, di:

- un *catalogo alfabetico* per autore;
- due *cataloghi per soggetto* (costituiti seguendo i criteri utilizzati da Pietro Riccardi nel comporre l'opera *Biblioteca Matematica Italiana*<sup>3</sup>), nel primo dei quali ad ogni

<sup>1</sup> L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, *La costituzione di un fondo di libri antichi: il caso del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli e la collezione Govi-Davis*, "Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli" s. IV v. LXVIII (2001), pp. 7-15.

<sup>2</sup> Si tratta del *Catalogo della Biblioteca esistente alla "Floridiana"* con introduzione di A. Silvestri, Napoli, Impresa Vendita in Italia Canessa-Fraia-Silvestri, 1917. A tale catalogo, compilato in occasione della vendita all'incanto della collezione Govi-Davis, si rinvia anche per una descrizione dettagliata della collezione stessa e per qualche altra notizia sul Davis. Per quanto concerne Govi, originario di Mantova, si rimanda a: F. Brioschi, *Commemorazione di Gilberto Govi*, "Atti della R. Accademia dei Lincei. Rendiconti della Classe di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali", s. IV, v. V (1889), pp. 29-31 (anche in F. Brioschi, *Opere matematiche*, Milano, Hoepli, 1906, t. IV, pp. 81-83); L. Ciccone, *Gilberto Govi*, "Annuario Scolastico della Regia Università degli Studi di Napoli 1889-90", Napoli, Tipog. R. Università, 1890, pp. 193-200; A. Wołyński, *Il prof. Gilberto Govi*, Roma, Stab. Tipog. Civelli, 1890; E.N. Legnazzi, *Prof. Gilberto Govi*, Atti e Memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova, XIV (1889-1890), pp. 101-153; B. Nardi, *Gilberto Govi*, Mantova, Tip. Aldo Manuzio, 1926; F. Palladino, *La storia delle scienze matematiche a Napoli tra Ottocento e Novecento: il contributo di Federico Amodeo*, Atti del Convegno "Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia", Modena, 16-18 marzo 1987, pp. 269-296; L. Briatore, S. Ramazzotti, *I <<Vinciani d'Italia>>: Gilberto Govi scienziato e storico*, "Giornale di Fisica", 35 (1994), pp. 127-133; R. Gatto, *Storia di una "Anomalia": Le facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'Unità d'Italia e la riforma Gentile 1860-1926*, Napoli, Fridericiana Editrice Universitaria, 2000, *passim*; F. Palladino, N. Palladino, *Gilberto Govi Storico della Fisica e Bibliofilo*, in Atti del Convegno *Contributi di Scienziati Mantovani allo Sviluppo della Matematica e della Fisica*, a cura di L. Tallini e F. Mercanti, Mantova, Consorzio Universitario Mantovano e altri Enti, 2001, pp. 209-226.

<sup>3</sup> Modena, Tip. Erede Soliani poi Soc. Tip. Modenese, 1870-1880, 2 voll.



argomento vengono associati i libri ad esso pertinenti, mentre nel secondo per ogni libro vengono evidenziati gli argomenti di cui esso tratta;

-tre *elenchi di attestazioni di possesso*, nel primo dei quali si danno tutte le attestazioni di possesso anteriori all'ingresso delle opere nei gabinetti universitari (i quali, a quel tempo, erano annessi alle cattedre universitarie; essi confluirono poi, alla fine della Seconda Guerra Mondiale, nell'Istituto di Matematica che a sua volta si è trasformato nell'attuale Dipartimento), nel secondo si danno le attestazioni di possesso multiple, nel terzo si segnala la presenza delle opere nel catalogo della collezione Govi-Davis;

-un *repertorio iconografico*, di natura antologica, in cui vengono fornite alcune immagini tratte dai volumi stessi.

Per la descrizione dei criteri seguiti nella catalogazione rinviamo alle premesse anteposte ai singoli cataloghi.

Cogliamo l'occasione per ringraziare la dottoressa Stefania Castanò della Biblioteca del Dipartimento "R. Caccioppoli" e la dottoressa Luisa Faella che ci hanno validamente aiutato nella stesura di questo catalogo. Un caldo ringraziamento va anche al dottor Alberto Baldi e al "Centro Interdipartimentale di Ricerca Audiovisiva per lo Studio della Cultura Popolare dell'Università degli Studi di Napoli <Federico II>" per la preziosa assistenza fornita nella realizzazione del repertorio iconografico. Ma un profondo sentimento di gratitudine è rivolto soprattutto a Gilberto Govi e Alexander Davis: l'amore per il libro colto e per il libro d'arte li spinse, verso la fine dell'Ottocento, a costituire quella collezione di cui ora presentiamo un frammento trascurabile.

## **2. CATALOGO DELLE OPERE ORDINATE ALFABETICAMENTE PER AUTORE**

### **2.1 CRITERI DI CATALOGAZIONE**

In ogni catalogo librario che non voglia essere un puro inventario di biblioteca risulta delicato scegliere l'unità di base da descrivere e ciò accade in modo particolare nel caso in cui si venga a trattare con materiale antico.

Si è qui rinunciato a considerare direttamente come unità di base l'unità fisicamente presente nel fondo librario che stiamo considerando, cioè il volume a stampa. In effetti tale scelta ha il vantaggio della precisione ma dà talvolta risultati poco perspicui o poco maneggevoli (si pensi, ad esempio, al caso di più pubblicazioni legate insieme e rinominate collettivamente da chi a una certa epoca le ha possedute).

Si è preferito invece privilegiare il concetto, un po' più vago, di *opera* intesa sia come unità di prodotto di uno o più autori consociati sia come unità di prodotto di uno o più curatori editoriali consociati.

L'*opera* così intesa può consistere allora di uno o più volumi, editi talora da differenti editori, e può raccogliere più contributi, anche precedentemente editi, provenienti da uno o più autori.

I volumi pertinenti alle opere vengono allora descritti fornendo innanzitutto il loro numero e le indicazioni editoriali (luogo di edizione, nome dell'editore, data di edizione).

Per le opere antiche, com'è noto, il concetto di titolo, nel senso moderno del termine, è solo parzialmente applicabile; in effetti, esaminando il frontespizio, ci si imbatte per lo più in un *continuo*, variamente bilanciato e ordinato, costituito in generale dal nome dell'autore, spesso ornato con i suoi titoli, da una dedica accompagnata anch'essa dai titoli della persona a cui è destinata, da una sorta di divisa dell'opera che è quanto di più si avvicina al titolo, da un riassunto, dall'esposizione delle intenzioni dell'autore, dalle indicazioni dell'editore, dai luoghi e dai tempi dell'edizione e dall'eventuale suddivisione dell'opera stessa.

Si tratta dunque di una fusione di elementi che in un'opera moderna sono ben distinti anche fisicamente.

Si è proceduto pertanto, secondo le consuetudini bibliografiche, ad una enucleazione, da questo *continuo*, del nome dell'autore e delle indicazioni editoriali; il *continuo* stesso è stato considerato come titolo sul quale sono state effettuate delle abbreviazioni segnalandole quando opportuno col simbolo dei tre puntini sospensivi.

Bisogna inoltre ricordare che il *continuo* su accennato è reso, spesso, tipograficamente con una varietà di caratteri e un'abbondanza di maiuscole con le quali sono costituite intere frasi. Esso è stato reso utilizzando solo due caratteri, quello normale, in tondo, e quello corsivo; con quest'ultimo si sono resi i nomi dei curatori, dei traduttori e di eventuali altri autori, i contributi dei quali siano inseriti nell'opera descritta.

Si è rispettata l'ortografia originale salvo dunque che nell'uso delle maiuscole. In qualche luogo è stata aggiornata l'accentuazione della vocale *e* nelle parole francesi.

Per quanto concerne il nome dell'autore, esso è spesso presente, nell'opera, sotto forma di qualche variante latina, ma si è scelto di darlo secondo la sua versione più diffusa che coincide per lo più con una delle varianti nazionali. Per gli autori italiani, quando è stato possibile, si è seguita la soluzione proposta dal Riccardi; per gli autori francesi si è seguita la forma suggerita dal Robert nel *Dictionnaire Universel des Noms Propres*; per gli autori greci e latini si è utilizzata la versione italiana. In alcuni casi il nome dell'autore è risultato essere uno pseudonimo; l'opera è stata allora registrata sotto il nome falso cui è stato fatto seguire, quando noto, il nome vero tra parentesi quadre.

In relazione alle indicazioni editoriali, abbiamo, anche in tal caso, proceduto, laddove possibile e senza che vi fosse danno per la chiarezza, a qualche abbreviazione: abbiamo lasciato la versione latina, quando tale era in origine, del nome dell'editore, e abbiamo, ancora, omesso le indicazioni di località che andavano oltre la città (anche questa riportata col suo nome latino quando in tale lingua si è trovata ad essere originariamente espressa).

Nel caso di opere ripartite, all'atto della stampa, in più volumi, abbiamo segnalato il cambiamento di editore, se avvenuto nel corso dell'uscita dei singoli volumi; ci siamo invece limitati a segnalare solo l'anno di edizione del primo e dell'ultimo volume (dati in ordine cronologico) se la composizione, dovuta ad un unico editore, è risultata distribuita per un arco di tempo di più anni.

Per l'ulteriore descrizione dei volumi, accertata la dipendenza del fondo dalla collezione Govi-Davis, si è utilizzato il modello proposto nel catalogo della collezione (le cui schede si sono rivelate però piene di imprecisioni ed errori). Sono stati pertanto segnalati la dimensione, la presenza di tavole, di figure, di antiporte incise, di ritratti, il tipo di rilegatura. Le abbreviazioni usate sono quelle comuni nei cataloghi librari. Ci

limitiamo a precisare che, impropriamente, con la dizione *in folio* intendiamo un volume di altezza superiore ai 29 cm.; con la dizione in 4° un volume compreso tra i 24 e i 29 cm.; con la dizione in 8° un volume di altezza tra i 19 e i 24 cm.; con la dizione in 12° un volume di altezza inferiore ai 19 cm.

Nel caso di un'opera realizzata con la legatura in un unico volume di più pubblicazioni, allora il volume è stato considerato come composto da più pubblicazioni distinte e descritto come tale solo all'occorrenza della prima pubblicazione legata. In tale occasione è stato fornito anche il contenuto completo del volume. Al presentarsi di altre pubblicazioni, contenute nel medesimo volume, ci si è limitati ad un rinvio. Il sistema utilizzato consente pertanto facilmente di individuare le unità fisiche costituenti il fondo e di reperirne la loro descrizione.

I dati forniti, relativi a volumi appartenenti al fondo sono stati tratti dai volumi stessi; in più, si è effettuata qualche integrazione relativa, soprattutto, ai nomi di battesimo, spesso non presenti, di autori di opere in lingua francese, agli autori nascosti sotto uno pseudonimo e agli autori anonimi che si è cercato di individuare per altre vie. L'assenza di qualche elemento va pertanto fatta risalire ad una lacuna riscontrabile nell'insieme dei dati offerti dal medesimo volume e non altrimenti colmata.

Per quello che concerne le opere i cui volumi risultano attualmente dispersi, i dati forniti sono stati ottenuti confrontando:

- a) le schede della biblioteca dipartimentale, compilate peraltro in maniera difettosa e lacunosa (esse sono attualmente in via di rifacimento);
- b) le schede di vari cataloghi antiquari tra le quali quelle del catalogo della collezione Govi, catalogo peraltro modesto, come già osservato, fatta eccezione per le poche schede relative ad opere di gran pregio;
- c) le schede di cataloghi bibliotecari cui è stato possibile accedere per via elettronica;
- d) i testi coincidenti presumibilmente con quelli indicati dalle schede dipartimentali e presenti in biblioteche napoletane.

Allorquando i volumi di un'opera dispersa erano presenti nel catalogo della collezione Govi-Davis, è stata fornita l'ulteriore descrizione di tali volumi così come data in questo catalogo; naturalmente per le opere disperse e non presenti nel catalogo non si è fornita alcuna ulteriore descrizione.

La stessa metodologia è stata utilizzata per individuare, laddove è stato possibile, il nome dell'autore di opere che si presentavano sotto forma anonima o sotto pseudonimo.

L'assenza nel volume del nome dell'autore, anche quando ricostruito, è stata segnalata esplicitamente. Le poche opere collettive e quelle anonime seguono nell'ordine quelle di autore definito.

Non è stato possibile identificare alcuni testi attualmente dispersi (esattamente due): i pochi dati relativi sono stati inseriti in calce al catalogo ma continuando la numerazione progressiva.

Per ciascuna opera in posizione finale è stata indicata la sua attuale non reperibilità con la sigla D (dispersa) o PD (parzialmente dispersa), inclusa tra parentesi tonde.

Alla fine della scheda della singola opera, laddove opportuno, è stato inserito qualche commento.

Osserviamo in conclusione che i dati analitici contenuti in questo catalogo modificano alcuni dettagli ma non le linee generali della descrizione del fondo fornita nel paragrafo quarto della precedente nota ad esso dedicata.

## 2.2 CATALOGO DELLE OPERE ORDINATE ALFABETICAMENTE PER AUTORE

1.     **Agnesi (M.)**. Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana. - *Milano*, nella Regia Ducal Corte, 1748, 2 vol., in 4°, con tav., pelle. (D)
2.     **Alembert (J. Le Rond d')**. Traité de dynamique. - *Paris*, David l'ainé, 1743, in 4°, con tav., intonso, cart.
3.     **Alembert (J. Le Rond d')**. Opuscles mathématiques ou mémoires sur différens sujets de géométrie, de mécanique, d'optique, d'astronomie etc. - *Paris*, t. primo e secondo David l'ainé 1761, t. terzo Briasson 1764, in 8°, con tav., bazzana.
4.     **Alembert (J. Le Rond d')**. Recherches sur différens points importants



du systême du monde. - *Paris*, David l'ainé, 1754-56, 3 voll. in 8°, con tav., bazzana.

5. **Angeli (degli, S.)**. Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum... - *Venetiis*, Ferretum, 1659, in 8°, con fig., perg.

6. **Anneo (Appio) [Buonafede (A.)]**. Ritratti poetici, storici e critici, di varj uomini di lettere di Appio Anneo de Faba Cromaziano. - Mutilo di frontespizio. Trattasi presumibilmente del t. I della quinta edizione, in *Napoli*, presso i fratelli Terres, 1789, in 8°.

7. **Aprocrimeno (Filandro)**. Sperimento geometrico per la doppiatura del cubo. - *Alitripoli*, anno II, Olimpiade DCXLIV. Si tratta di un'opera scritta sotto pseudonimo greco e dichiarata come pubblicata in una fittizia città greca in un anno della seicentoquarantaquattresima olimpiade (ma 1791). Vi è unito: **Giulio (I.)**. Lezione aritmetica sopra l'estrazione delle radici cube. - *Torino*, Stamperia sociale 1795. Si tratta di due fascicoli in 8°, il primo con tav., legati insieme ad estratti e fascicoli ottocenteschi in un volume in 8°, cart., cui non è stato assegnato un autore ma solo il titolo "Opuscula mathematica III".

8. **Atwood (G.)**. Compendio d'un corso di lezioni di fisica sperimentale del signor Giorgio Atwood ... tradotto dall'idioma inglese, ed accresciuto di una dissertazione sul computo dell'errore probabile nelle sperienze ed osservazioni dal p. *Gregorio Fontana*. - *Pavia*, Stamperia del Monistero di S. Salvatore, 1781, in 12°, con fig., mz. perg.

9. **Atwood (G.)**. Altro esemplare, in 8°, cart..

10. **Ballexserd (J.)**. Dissertazione sopra il quesito: Quali siano le cause principali, per cui una gran parte d'Uomini muore nell'infanzia, e quali i rimedj più semplici, ed efficaci per conservar loro la vita... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1772, in 4°, cart.

11. **Belidor (B. F. de)**. Nouveau cours de mathématique, à l'usage de l'artillerie et du génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette science à la théorie et à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la guerre. Nouvelle édition corrigée et considérablement augmentée par M. Belidor. - *Paris*, Nyon, 1757, in 8°. (D)

12. **Berard (I. B.)**. Mélanges physico-mathématiques. - *Paris*, Le Clerc, 1800, in 8°, con tav., mz. pelle. (D)

13. **Bernoulli (D.)**. Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii. - *Argentorati*, Dulseckeri, 1738, in 4°, con tav., pelle. (D)

14. **Bernoulli (J.)**. Ars conjectandi opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis et epistola gallice scripta De ludo pilae reticularis - *Basileae*, Thurnisiorum, 1713, in 8°, con tav., bazzana.

15. **Bevilacqua (G.)**. Dissertazione sopra il quesito: Quale siano le cagioni della malattia del Riso ... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1778, in 4°, squinternato.

16. **Bina (A.)**. Ragionamento sopra il quesito: Qual sia il metodo più sicuro, più facile e meno dispendioso tanto nell'esecuzione, che nella manutenzione, per impedire e riparare la corrosione delle ripe de' fiumi arginati ... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1769. Vi è unito: **Lorgna (A. M.)**. Dissertazione sopra il quesito: Essendo le pressioni dell'acqua stagnante in ragione delle altezze... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1769. Vi è unito ancora: **Zeviani (G. V.)**. Dissertazione sopra il quesito: Qual sia preferibile fra i rimedi preservativi dello scorbutto, specialmente di terra. - *Mantova*, Per l'erede di Alberto Pazzoni, 1769, con tav., in 4°, cart.

17. **Bianchini (F.)**. Hesperii et phosphori nova phaenomena sive

observationes circa planetam Veneris. - *Romae*, Salvioni, 1728, *in fol.*, con antiporta inc. in rame e tav., intonso. (D)

18. **Bion (N.)**. Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématique. - *Haye*, 1723, in 4°, con antiporta e tav. inc. in rame, perg. (D)

19. **Blondel (F.)**. Histoire du calendrier romain. - *Paris*, Langlois, 1682, in 4°, pelle. (D)

20. **Borelli (G. A.)**. De vi percussiois liber... - *Bononiae*, Montij, 1667, in 8°, con tav., perg.

21. **Bozza (S.)**. Assertiones tres physico-mathematicae publice propugnandae a Stephano Bozza Seminarii Patavii alumno, praeceptore et adjutore Antonio Zuccoli. - *Patavii*, Typis Seminarii, 1800, in 8°, con tav., cart.

22. **Brücker (J.)**. Historia critica philosophiae... - *Lipsiae*, Breitkopf, 1742-44, 4 tomi in 5 vol., in 8°, con ritratto dell'autore e tav. inc. in rame, perg.

23. **Brunacci (V.)**. Calcolo integrale delle equazioni lineari. - *Firenze*, presso Pietro Allegroni, 1798, in 8°, mz. pelle.

24. **Buffier (P.)**. Cours des sciences sur des principes nouveaux et simples... - *Paris*, Cavelier et Giffart, 1732, *in fol.*, mz. pelle.

25. **Cagnoli (A.)**. Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique traduit de l'italien par M. Chompré. - *Paris*, Didot l'ainé, 1786, in 4°, con tav., pelle. (D)

26. **Canepario (P.M.)**. De atramentis cuiuscumque generis. - *Roterodami*, Fritsch, 1718, in 8°, perg.



27. **Capelli (A.)**. Breve compendio d'operazioni geometriche... - *Venezia*, Mora, 1740, in 8°, con antiporta inc. in rame e tav., cart.
28. **Caravelli (V.)**. Elementi di matematica composti per uso della Reale Accademia Militare, tomo III. - *Napoli*, Raimondi 1770, in 12°, con tav., mz. pelle.
29. **Carnot (L.)**. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. - *Paris*, Duprat, 1797, in 8°, con tav., mz. pelle.
30. **Cassini (G. D.)**. Oeuvres diverses. - *Paris*, Montalant, s. d., in 4°, con tav., bazzana.
31. **Castelli (B.)**. Alcuni opuscoli filosofici... - *Bologna*, Monti, 1669, in 8°, con fig., perg.
32. **Cavalieri (B.)**. Directorium generale uranometricum. - *Bononiae*, Tebaldini, 1632, in 4°, pelle. (D)
33. **Cavalieri (B.)**. Lo specchio ustorio ovvero trattato delle sezioni coniche et alcuni loro mirabili effetti... - *Bologna*, Ferroni, 1632; v. n° 121
34. **Cavalieri (B.)**. Geometria indivisibilibus continuorum. - *Bononiae*, Ferroni, 1635, in 4°, con fig., intonso. (D)
35. **Cavalieri (B.)**. Compendio delle regole de' triangoli... - *Bologna*, Monti, 1638, in 12°, con fig., cart.
36. **Cavalieri (B.)**. Trigonometria plana et sphaerica, linearis et logarithmica. - *Bononiae*, Benatii, 1643, in 4°, perg. (D)
37. **Cavalieri (B.)**. Exercitationes geometricae sex. - *Bononiae*, Montij,

1647, in 4°, con fig., pelle. (D)

38. **Ceva (G.)**. *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio...* - *Mediolani*, Montiae, 1678, in 4°, con tav., perg.

39. **Ceva (G.)**. *Opuscula mathematica...* - *Mediolani*, Montiae, 1682, in 4°, con tav., perg.

40. **Ceva (G.)**. *Geometria motus opusculum geometricum...* - *Bononiae*, Ant. Pisarij, 1692, in 4°, con tav., pelle.

41. **Chatelet (E. Le Tonnelier de Breteuil, marquis du)**. *Institutions de physique*. - *Paris*, Prault fils, 1740, in 8°, con tav. e numerosi *faux titres* ed antiporta inc. in rame, bazzana.

42. **Clavio (Ch.)**. *Geometria practica*. - *Romae*, Zannetti, 1604, in 4°, con fig., mz. perg.

43. **Chiaromonti (S.)**. *Opuscula varia mathematica...* - *Bononiae*, Zeneri, 1653, in 8°, con fig., perg.

44. **Colle (F. M.)**. *Dissertazione sopra il quesito: Dimostrare, che cosa fosse, e quanta parte avesse la Musica nell'educazione...* - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1775, in 8°, squinternato.

45. **Colle (F. M.)**. *Dissertazione sopra il quesito: Facendosi le piene del Po per generale osservazione sempre più frequenti, ed elevate, ...* - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1779, in 4°, squinternato.

46. **Condorcet (M. J. A. N. de Caritat, marquis de)**. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité de voix*. - *Paris*, Imprimerie Royale, 1785, in 4°, intonso, perg.

47. **Conradi (J. M.)**. Der dreyfach geartete Sehe-Strahl in einer kurtzen doch deutlichen Anweisung zur Optica oder Sehe-Kunst, bey übrigen und einsamen Stunden zu Erhebung göttlicher Weißheit und den Kunst-begierigen zur Handleitung, in etwas erwogen. - *Coburg*, Thurnau /drucks J. F. Regelein, 1710, in 8°, con antiporta inc. in rame e con tav., perg.

48. **Coressio (G.)**. Operetta intorno al galleggiare de' corpi solidi... - *Firenze*, B. Sermartelli e fratelli, 1612, in 8°, cart.

49. **Cotte (L.)**. Mémoires sur la météorologie, pour servir de suite et de supplément au traité de météorologie publié en 1774. - *Paris*, Imprimerie Royale, 1788, 2 vol. in 4°, con tav., bazzana. (D)

50. **Cousin (J. A. J.)**. Introduction à l'étude de l'astronomie physique. - *Paris*, Didot l'ainé, 1787, in 4°, con tav., bazzana.

51. **Cramer (G.)**. Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. - *Génève*, Frères Cramer et Cl. Philibert, 1750, in 4°, con tav., pelle.

52. **Cristiani (G. F.)**. Delle misure d'ogni genere antiche e moderne... - *Brescia*, Bossini, 1760, in 4°, con antiporta inc. in rame e con tav., mz. perg.

53. **Daniel (G.)**. Voyage du monde de Descartes. Nouvelle édition. - *Utrecht*, Neaulme, 1732. Vi è unito : **Daniel (G.)**. Suite du voyage du monde de Descartes, ou nouvelles difficultés proposées à l'auteur du Voyage du monde de Descartes. - *Utrecht*, Neaulme, 1732, in 12°, con fig., perg.

54. **Daniel (G.)**. Suite du voyage du monde de Descartes, ou nouvelles difficultés proposées à l'auteur du Voyage du monde de Descartes. - *Utrecht*, Neaulme, 1732; v. n°52.

55. **De Caesaris (L.)**. Annunzio del passaggio di Mercurio sotto il sole del dì dodici novembre millesettecentottantadue... - *Roma*, Michel'Angelo Barbiellini, 1682 [*sic*]. Si tratta di un fascicolo in 8°, con tav., legato insieme ad estratti e fascicoli ottocenteschi in un volume in 8° in mz. pelle, cui non è stato assegnato un autore ma solo il titolo 'Memorie di matematica e fisico-matematiche'.

56. **Dechales (C. F. Milliet)**. *Cursus seu mundus mathematicus...* Editio altera ex manuscriptis authoris aucta et emendata opera et studio *R. P. Amati Varcin...* - *Lugduni*, Anissonios, Posuel et Rigaud, 1690, 4 vol. *in fol.*, con fig., pelle.

57. **Deidier (abbé A.)**. *Lettre d'un mathématicien à un abbé. Seconde lettre d'un mathématicien à un abbé. Troisième lettre d'un mathématicien à un abbé.* - *Paris*, chez Jombert, 1737, in 12°, con tav. bazzana. Non vi è indicazione dell'autore.

Le tre lettere presentano una numerazione di pagina distinta. Per la prima si apprende dal frontespizio la sua disponibilità presso Jombert mentre in fine vi è l'indicazione 'De l'imprimerie de Jacques Chardon'. Per la seconda non v'è indicazione editoriale. Per la terza vi è alla fine l'indicazione 'De l'imprimerie de Joseph Bulloet, rue de la Parcheminerie, près saint Severin. 1737.'

Non risulta chiaro se l'opera sia stata concepita come raccolta di lettere, forse anche già pubblicate, o se invece qualche possessore abbia riunito tre opuscoli distinti.

58. **Deidier (abbé A.)**. *La science des géomètres ou la théorie et la pratique de la géométrie...* - *Paris*, Jombert, 1739, in 4°, con tav. e graziosi *faux titres* incisi da *Cochin fils*, bazzana.

59. **Deidier (abbé A.)**. *La mesure des surfaces et des solides, par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité.* - *Paris*, Jombert, 1740, in 4°, con tav., bazzana.

60. **Dodson (J.)**. The Calculator: being correct and necessary tables for computation... - *London*, Wilcox, 1747, in 4°, bazzana.

61. **Euclide**. Euclidis...Elementorum geometricorum libri 15. Cum expositione Theonis in priores 13 a Bartholomaeo Veneto Latinitate donata, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos. His adiecta sunt Phaenomena, Catoptrica & Optica, deinde Protheoria Marini & Data, postremum vero, Opusculum de levi & ponderoso, hactenus non visum, eiusdem auctoris. - *Basileae*, per Iohannem Hervagium, 1546. (D)

Si tratta dell'opera curata dal Melantone il cui nome è presente nella prefazione.

62. **Euclide**. De gli elementi d'Euclide libri quindici con gli scholii antichi tradotti in lingua latina da *M. Federico Commandino* da Urbino. - *Urbino*, Frisolino, 1575, in 8°, con fig., pelle. (D)

63. **Euclide**. Euclide Megarense acutissimo philosopho solo introduttore delle scienze mathematiche, diligentemente rassettato ed alla integrità ridotto per il degno professore di tal scienze *Nicolò Tartalea*... Di nuovo con ogni diligenza ben corretto e ristampato. - *Venetia*, Heredi Troian Navo, 1585, in 8°, con fig., pelle.

64. **Euclide**. Euclidis posteriores lib.i. Accessit XVI. de solidorum regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati, nunc iterum editi ac multarum rerum accessione locupletati, auctore *Christophoro Clavio*. - *Romae*, apud Bartholomaeum Grassium, 1589, 2 vol, con fig., in 12°, perg.

65. **Eulero (L.)**. Mechanica sive motus scientia analytice exposita. - *Petropoli*, Academiae Scientiarum, 1736, 2 vol. in 4° gr., con tav., pelle. (D)

66. **Eulero (L.)**. Methodus inveniendi lineas curvas... - *Lausannae et Genevae*, Bousquet, 1744, in 4°, con tav., mz. perg.

67. **Eulero (L.)**. Éléments d'algèbre, traduits de l'allemand, avec des notes et des additions de l'analyse déterminée. - *Lyon*, chez Bruyset, 1795, 2 vol. in 8°, bazzana.

68. **Eulero (L.)**. Introductio in analysin infinitorum. - *Lugduni*, Bernuset, Delamollière, Falque et soc., 1797, 2 vol. in 4°, con tav., mz. tela.

69. **Fontana (C.)**. Utilissimo trattato dell'acque correnti. - *Roma*, Buagni, 1696, in fol., con fig., perg. (D)

70. **Fontana (F.)**. Opuscoli scientifici. - *Napoli*, presso La Nuova Società Letteraria e Tipografica, 1787, in 8°, cart.

71. **Fontana (G.)**. Dissertazione idrodinamica sopra il quesito: Cercar la cagione per la quale salendo ne' getti quasi verticali ... Con un'appendice sopra il moto de' corpi ne' mezzi resistenti. - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1775, in 4°, con tav., squinternato.

72. **Fontana (G.)**. Ricerche sopra diversi punti concernenti l'analisi infinitesimale e la sua applicazione alla fisica... - *Pavia*, presso Baldassare Comino, 1793, in 8°, con tav., mz. pelle.

73. **Fontenelle (B. Le Bovier de)**. Oeuvres diverses... - *Londres*, Vaillant, 1721, 2 vol. in 12°, con tav., pelle.

74. **Forfait (P.A.)**. Solutio problematis... Eum modum determinare, quo minimo labore et minima impensa navigabiles Alvei expediantur ... - *Mantuae*, Typis haeredis Alberto Pazzoni, 1777, in 4°, con tav., squinternato.

75. **Fossombroni (V.)**. Memorie sul principio delle velocità virtuali. - *Firenze*, Gaetano Cambiagi, 1769, in 8°, con tav., cart.

76. **Frisi (P.)**. Dissertationum variarum... - *Lucae*, Junctinium, 1759-61, 2 vol. in 4° con tav., perg.

77. **Frisi (P.)**. Istituzioni di meccanica, d'idrostatica, d'idrometria e dell'architettura statica e idraulica... - *Milano*, Galeazzi, 1777, in 8° intonso, mz. pelle.

78. **Frisi (P.)**. Operum... - *Mediolani*, Galeatium, 1782-1785, 3 vol. in 4°, con tav., bazzana.

79. **Gardiner (W.)**. Tables de logarithmes... Nouvelle édition. - *Avignon*, Aubert, 1770, in 4°, bazzana.

80. **Gardiner (W.)**. Altro esemplare.

81. **Gherardo (G.)**. Dissertazione sopra il quesito: Qual debba essere il bilancio della popolazione e del commercio fra la Città e il suo Territorio; rilevarne i disordini e i rimedi praticabili, onde provvedere al più forte reciproco sostentamento, e bisogno... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1772, in 4°, cart.

82. **Gherardo (G.)**. Elogio di Carlo Ottavio conte di Colloredo. - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1787, in 4°, squinternato.

83. **Giulio (I.)**. Lezione aritmetica... sopra l'estrazione delle radici cube. - *Torino*, Stamperia sociale, 1795; v. n° 7.

84. **Grandi (G.)**. I fiori geometrici del padre abbate d. Guido Grandi

tradotti e spiegati in grazia della studiosa gioventù da *Tommaso Narducci* ... con l'aggiunta di alcune dimostrazioni dell'istesso autore. - *Lucca*, per Francesco Marescandoli, 1729, in 8°, con tav., perg.

85. **Grandi (G.)**. *Instituzioni meccaniche*... - *Firenze*, Tartini e Franchi, 1739, in 8°, con tav., mz. pelle.

86. **Grandi (G.)**. *Instituzioni geometriche*. - *Firenze*, Gio. Gaetano Tartini e Santi Franchi, 1791, in 8°, con tav., mz. pelle.

87. **Gratognini (G.)**. *Esame analitico di un paradosso proposto ai geometri dal signor d' Alembert e della soluzione datane dal ch. sig. abate don Lorenzo Mascheroni*. - *Pavia*, Stamperia del R. I. Monastero di S. Salvatore, 1790, in 12°, mz. pelle.

88. **Gravesande (G. J.)**. *Physices elementa mathematica, experimentis confirmata, sive introductio ad philosophiam newtonianam*. - *Leidae*, Langerak et Verbeek, 1748, 2 gr. vol. in 4°, con tav., intonsi. (D)

89. **Guastaferrì (F.)**. Lettera di Fabritio Guastaferrì al sig. Gio: Francesco Saliti con la quale gli dà parte dei suoi trattenimenti; Lettera seconda' ... nella quale segue a dargli parte de' suoi trattenimenti; Lettera terza...; Lettera quarta...; Lettera quinta... Nuova bilancia de' liquidi del signor Fabritio Guastaferrì, estratto dal V Giornale de' letterati del 31 maggio 1669. - *Roma*, Dragondelli 1663, 1666, 1665, 1667, 1668; Tinassi, 1672, in 12°, con una inc., perg.

Le varie parti dell'opera risultano pubblicate separatamente e presentano una numerazione autonoma; potrebbero tuttavia essere state composte in un tutt'uno dall'autore stesso. In effetti il volume si apre con un'incisione che riprende un mosaico posto nel pavimento centrale della chiesa di Santa Maria Maggiore in Roma. Una scritta nella parte bassa ricorda che esso fu restaurato per cura del Guastaferrì nel 1669.



90. **Guyot (G. G.)**. Nouvelles récréations phisiques et mathématiques... Nouvelle édition - *Paris*, À la librairie Rue S. André-des Arcs n° 46, 1798, 3 vol. in 8°, con tav., mz. pelle.

91. **Hermann (J.)**. Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo. - *Amstelaedami*, Wetstenios, 1716, in 4°, perg.

92. **Kircher (A.)**. Athanasii Kircheri Soc. Iesu Oedipi Aegyptiaci tomus secundus. Gymnasium sive phrontisterion hieroglyphicum in duodecim classes distributum, in quibus encyclopaedia Aegyptiorum, id est, veterum Hebraeorum, Chaldaeorum, Aegyptiorum, Graecorum, coeterorumque orientalium recondita sapientia, ... Pars prima complectens sex priores classes. - *Romae*, ex Typographia Vitalis Mascardi, 1653. (D)

93. **Lambert (J. H.)**. La perspective affranchie de l'embaras du plan géométral. - *Zuric*, Heidegguer, 1759, in 8°, con tav., cart.

94. **Lamy (B.)**. Élémens des mathématiques ou traité de la grandeur en général, qui comprend l'arithmétique, l'algèbre, l'analyse, et les principes de toutes les sciences qui ont la grandeur pour objet. - Quatrième édition revue et augmentée. - *Amsterdam*, Paul Marret, 1710, in 12°, mz. pelle.

95. **Landi (E.)**. Dissertazione sopra il quesito: Se vi siano mezzi opportuni per migliorare i Fiumi mantovani, e anche ridurli atti a lunga navigazione per Mare. - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1781, in 4°, squinternato.

96. **Langsdorf (K. Ch.)**. Physisch-Mathematische Abhandlung über Gegenstände der Wärmelehre welche mit der Ausübung in der nächsten Verbindung stehen. - *Marburg*, in der Neuen Academischen Buchhandlung, 1796 in 12°, con tav., cart.

97. **Lansberg (Ph.)**. Progymnasmatum astronomiae restitutae. Liber I De motu Solis. - *Middelburgi Zelandae*, apud Zachariam Romanum, 1628, in 8°, con fig., perg.

98. **Lavoisier (A. L.)**. Trattato elementare di chimica... del sig. Lavoisier... recato dalla francese nell'italiana favella ... da *Vincenzo Dandolo*. - *Venezia*, Zatta e figli, 1792, 4 vol. in 8° di cui due di supplementi, cart.

I due volumi di supplementi sono in realtà l'uno "L' esame delle affinità chimiche ... del sig. Morveau", tradotto ancora dal Dandolo, l'altro "Dizionario vecchio nuovo, nuovo vecchio di nomenclatura chimica" dello stesso Dandolo.

99. **Le Cat (C. N.)**. Traité des sens. Nouvelle édition - *Amsterdam*, Wetstein, 1744, in 8°, con tav., mz. perg.

100. **Leeuwenhoek (A. A.)**. Opera omnia, seu arcana naturae... - *Lugduni Batavorum*, Langerak, 1722, in 8°, con antiporta e tav. inc. in rame, perg.

101. **Leibniz (G. G.)**. Principia philosophiae more geometrico demonstrata: cum excerptis ex epistolis philosophi et scholiis quibusdam ex historia philosophica ... Accedunt theoremata methaphysica De proprietatibus quibusdam entis infiniti ... nec non Meditatio philosophica... - *Francofurti et Lipsiae*, Monath, 1728, in 4°, cart.

102. **Leibniz (G. G.); Bernoulli (J.)**. commercium philosophicum et mathematicum. - *Lausannae et Genevae*, Bousquet, 1745, 2 vol. in 4°, con ritratto inc. in rame, con tav., perg.

103. **Le Monnier (P. C.)**. Histoire céleste ou recueil de toutes les observations astronomiques faites par ordre du Roy... - *Paris*, Briasson, 1741, in 4°, con tav., bazzana.

104. **Leutmann (J. G.)**. Instrumenta meteorognosiae inservientia...

Accedunt Hyetostathmica duo et Exatmoscopium, nec non Meditationes de mensura quadam universali... - *Wittenbergae*, vid. Zimmermanni, 1725, in 12°, con antiporta inc. in rame e tav., mz. tela.

105. **L'Hospital (G. F. A., marquis de Sainte Mesme)**. Analyse des infiniment petits... Seconde édition - *Paris*, Montalant, 1716, in 4°, con tav., cart.

106. **L'Hospital (G. F. A., marquis de Sainte Mesme)**. Traité analytique des sections coniques... - *Paris*, Montalant, 1720, in 4°, con tav., bazzana.

107. **Liesganig (J.)**. Tabulae memoriales praecipua arithmeticae tum numericae tum literalis... - *Viennae Austriae*, Trattner, 1755, in 4°, cart.

108. **Litta (A.)**. Dissertazione sopra il quesito: Con qual proporzione di parte possa costruirsi una Macchina, non molto composta, per elevare acqua da stagni... - *Mantova*, per l'Erede di Alberto Pazzoni, 1782, in 4°, con tav., squinternato.

109. **Lorenzini (S.)**. Osservazioni intorno alle torpedini... - *Firenze*, Onofri, 1678. Vi è unito: **Sangallo (P. P. da)**. Esperienze intorno alla generazione delle zanzare. - *Firenze*, Vangelisti, 1679, in 8°, con tav., perg.

110. **Lorgna (A. M.)**. Dissertazione sopra il quesito: Essendo le pressioni dell'acqua stagnante in ragione delle altezze... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1769; v. n° 16.

111. **Louis de France (duc de Bourgogne)**. Serenissimi Burgundiae ducis elementa geometrica ex gallico sermone in latinum traslata ... Insuper introductio ad algebrae applicationem ad geometriam, auctore *Guisneo* nunc primum latine reddita. - *Patavii*, ex Typographia Seminarii, apud Joannem Manfrè, 1713, in 4°, con tav., cart.

112. **Luchini (D.)**. Trattenimenti matematici, i quali comprendono copiose tavole horarie per gli orologi a sole. - *Roma*, Zenobi, 1730, in 4°, perg. (D)

113. **Ludenna (A.)**. Due opuscoli matematici. - *Venezia*, Storti, 1793, in 4°, con tav., cart.

114. **Luino (F.)**. Delle progressioni e serie coll'aggiunta di due memorie del p. *Ruggiero Giuseppe Boscovitch*. - *Milano*, Galeazzi, 1767, in 4°, con tav., con tav., cart.

115. **Maclaurin (C.)**. Traité des fluxions traduit de l'anglois par le R. P. *Pezenas*. - *Paris*, Jombert, 1749, 2 vol. in 4°, con tav., bazzana.

116. **Maclaurin (C.)**. Exposition des découvertes philosophiques de M. le Chevalier Newton. Ouvrage traduit de l'anglois par *M. Lavirotte*. - *Paris*, Durand et Pissot, 1749, in 4°, con tav., bazzana.

117. **Maclaurin (C.)**. Traité d'algèbre et de la manière de l'appliquer, traduit de l'anglois... - *Paris*, Jombert C. A., 1753, in 4°, con tav., bazzana.

118. **Magdeleine (P. de Sainte Marie)**. Traité d'horlogiographie... - *Paris*, Tavernier, 1641, in 12°, con tav., perg.

119. **Magini (A.)**. De planis triangulis. - *Venetiis*, Meietum, *Venetiis*, Ciotum, 1592, in 4° fig., perg. (D)

120. **Magini (A.)**. Primum Mobile duodecim libris contentum in quibus habentur Trigonometria Sphaericorum et Astronomica, Gnomonica Geografica quam problemata ac preterea Magnus Trigonometricus canon emendatus et auctus ac Magna Primi Mobilis Tabula. - *Venetiis*, Perchacinum, 1609; *Bononiae* Bellagamba, 1609, in fol., con fig., perg. (D)

121. **Magini (A.)**. Breve instruttione sopra l'apparenze et mirabili effetti dello specchio concavo sferico... di nuovo ristampata. - *Bologna*, Ferroni, 1628, con fig. Vi è unito: **Cavalieri (B.)**. Lo specchio ustorio ovvero trattato delle setioni coniche et alcuni loro mirabili effetti... - *Bologna*, Ferroni, 1632, in 8°, con tav., perg.

122. **Mahon (Stanhope Charles, third earl, viscount)**. Principes d'électricité... traduit de l'anglois par M. l'abbé N... - *Londres*, à *Bruxelles* chez Emmanuel Flon, 1781, in 8°, con tav., bazzana.

L' "abbé N..." è John Tuberville Needham. Più comunemente il Mahon è registrato come Stanhope Charles (terzo conte di). Abbiamo qui preferito utilizzare come prima sua identificazione quella di visconte di Mahon secondo l'uso settecentesco quando erano ancora assai vivi gli echi della conquista di Mahon nell'isola di Minorca da parte di suo nonno che meritò per quest'impresa il titolo. Notiamo comunque esplicitamente che l'Encyclopaedia Britannica registra quest'autore sotto entrambe le dizioni.

123. **Mairan (D. de)**. Dissertation sur la glace... - *Paris*, Imprimerie Royale, 1749, in 12° con antiporta inc. in rame, con tav., bazzana.

124. **Mairan (D. de)**. Altro esemplare.

125. **Maire (Ch.)**; **Boscovich (R. G.)**. Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église entreprise par ordre et sous l'auspice du Pape Benoît XIV... Traduit du latin... - *Paris*, Tilliard, 1770, in 4°, con tav., bazzana.

126. **Manfredi (E.)**. De gnomone meridiano bononiensi... - *Bononiae*, Laelii a Vulpe, 1736, in 4°, con tav., bazzana.

127. **Manzini (C. A.)**. L'occhiale all'occhio, dioptrica pratica... - *Bologna*, Herede del Benacci, 1661, in 8°, con ritratto di Eustachio Divini e fig., perg.

128. **Marcegaglia (G.)**. Fascetto di pratiche matematiche spiegate alle persone popolari per uso del commercio umano, e civile, in questa seconda edizione corretto ed accresciuto di altre molte importanti notizie e dedicato al nobile sig. Marchese Antonio Repeta patrizio vicentino. - *Verona*, Dionisio Ramanzini, 1780, in 12°, con tav., mz. pelle.
129. **Marchetti (A.)**. De resistentia solidorum. - *Florentiae*, Vangelisti et Matini, 1669, in 8° con fig., perg.
130. **Marinoni (J. J.)**. De astronomica specula domestica et organico apparatu astronomico; libri duo. - *Viennae Austriae*, Kaliwoda, 1745, in fol., con antiporta e tav. inc. in rame, pelle. (D)
131. **Marinoni (J. J.)**. De re ichnografica. - *Viennae Austriae*, 1751, in 4°, con fig. e tav., cart. (D)
132. **Mariotte (abbé E.)**. Oeuvres... - *Leide*, P. Vander Aa, 1717, 2 tomi in 1 vol. in 4°, con tav., bazzana.
133. **Martin (B.)**. A plain and familiar introduction to the Newtonian experimental philosophy... Fifth edition. - *London*, Print for the Author, 1765, in 8°, con tav., bazzana.
134. **Mascheroni (L.)**. La geometria del compasso. - *Pavia*, Eredi Galeazzi, 1797, in 8°, con tav., cart.
135. **Mascheroni (L.)**. Altro esemplare, mz. pelle.
136. **Mascheroni (L.)**. Altro esemplare, mz. pelle.
137. **Mauduit (A. R.)**. Les élémens des sections coniques... dans lequel on a renfermé le petit traité des sections coniques de M. Delahire. Par M. M\*\*\*,

Professeur de Mathématiques. - *Paris*, Desaint et Saillant, 1757, in 8°, con tav., bazzana. Manca l'indicazione dell'autore.

138. **Mauduit (A. R.)**. Altro esemplare.

139. **Maupertuis (P. L. Moreau de)**. Oeuvres. Nouvelle édition. - *Lyon*, Bruyset, 1768, 4 vol. in 8°, con ritratto dell'autore inc. in rame, con fig., bazzana.

140. **Mazzuchelli (G. M.)**. Notizie storiche e critiche intorno alla vita, alle invenzioni ed agli scritti di Archimede siracusano. - *Brescia*, Rizzardi, 1737, in 4°, con tav., cart.

141. **Michelotti (F. D.)**. Sperimenti idraulici... - *Torino*, Stamperia Reale, 1767, 1771, 2 vol. in 4°, ritratto di Carlo Emanuele I inc. in rame e con tav., bazzana.

142. **Moivre (A. de)**. La dottrina degli azzardi applicata ai problemi della probabilità della vita, delle pensioni vitalizie, reversioni, tontine, ecc... trasportata dall'idioma inglese e arricchita di note...dal Padre *D. Roberto Gaeta* sotto l'assistenza del Padre *G. Fontana*. - *Milano*, Galeazzi, 1776, in 8°, cart.

143. **Molières (J. Privat de)**. Leçons de physique. - *Paris*, veuve Brocas, Musier et Bulloet, 1734-39, 4 vol. in 12°, con tav., bazzana.

144. **Molières (J. Privat de)**. Lezioni di fisica... - *Venezia*, Storti, 1743, tre tomi in 1 vol. in 8°, con tav., perg.

145. **Monge (G.)**. Géométrie descriptive. Leçons données aux écoles normales l'an 3 de la République. - *Paris*, an VII (1798-1799), Baudouin, in 4°, con tav., mz. pelle.

146. **Montucla (J. F.)**. Histoire des mathématiques... - *Paris*, Jombert,

1758, 2 vol. in 4° con tav., bazzana.

147. **Moreto (Th.)**. Tractatus physico-mathematicus de aestu maris. - *Antuerpiae*, Meursium, 1665, in 4°, intonso, con fig., mz. perg.

148. **Mozzi (G.)**. Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi. - *Napoli*, Campo, 1763, in 8°, con tav., mz. perg.

149. **Musschenbroeck (P. Van)**. Tentamina experimentorum naturalium captorum in Academia del Cimento sub auspiciis Serenissimi Principis Leopoldi Magni Etruries ducis ab eius academiae secretario conscriptorum...addidit *Petrus van Musschenbroeck*. - *Lugdunum Batavorum*, Verbeek, 1731, in 4°, con tav., bazzana.

150. **Musschenbroeck (P. Van)**. Essai de physique avec une description de nouvelles sortes de machines pneumatiques et un recueil d'expériences... Traduit de l'Hollandois par *M. Pierre Massuet*. - *Leyden*, Luchtmans, 1739, 2 vol. in 4° con ritratto dell'autore inc. in rame da *Koubraken* e tav., intonso, mz. perg.

151. **Musschenbroeck (P. Van)**. Cours de physique expérimentale et mathématique. Traduit par *Sigaud la Fond*. - *Paris*, Dehansy le jeune, 1769, 3 vol. in 4°, con tav., bazzana.

152. **Muys (W. G.)**. Elementa physices methoda mathematica demonstrata. - *Amstelodami*, Janssonio Weresbergios, 1711, in 4°, con fig., perg. (D)

153. **Newton (I.)**. Optice sive de reflexionibus, refractionibus, inflexionibus et coloribus lucis libri tres... Latine reddidit Samuel Clarke... Editio secunda. - *Londini*, Gul. et John Innys, 1719, in 8°, con tav., perg.

154. **Newton (I.)**. Philosophiae naturalis principia mathematica. - *Londini*, Gul. et John Innys, 1726, in 4° fig. (D)



155. **Newton (I.)**. *Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica liber.* - *Lugduni Batavorum*, Verbeek, 1732, in 4°, con tav., mz. tela.

156. **Newton (I.)**. Altro esemplare. (D)

157. **Newton (I.)**. *Philosophiae naturalis principia mathematica... perpetuis commentariis illustrata communi studio PP. Thomae Le Seur et Francisci Jacquier...* - *Coloniae Allobrogum*, Philibert, 1760, 3 tomi in 4 vol., in 4°, con fig., bazzana. (PD). E' presente solo il primo volume.

158. **Newton (I.)**. Altro esemplare. (D)

159. **Nicéron (J. F.)**. *Thaumaturgus opticus: Pars Prima, ad Em. Card. Mazarinum.* - *Lutetiae Parisiorum*, Io. Du Pius, 1663, in fol., con antiporta inc. in rame e tav., ritratto dell'autore inc. in rame. (D)

160. **Nicolas (P.)**. *De novis spiralibus exercitationes duae.* - *Tolosae*, J. et G. Pech, 1693 ; v. n° 187.

161. **Nollet (abbé, J. A.)**. *Lettres sur l'électricité... -Seconde partie.* - *Paris*, Guerin et Delatour, 1753-1760. - *Troisième partie. Seconde édition.* - *Paris*, Durand neveu, 1770, 3 vol. in 12°, con tav., bazzana.

162. **Nollet (abbé, J. A.)**. *L'art des expériences ou avis aux amateurs de la physique... Seconde édition.* - *Paris*, Durand neveu, 1770, 3 vol. in 12°, con tav., bazzana.

163. **Nollet (abbé, J. A.)**. *Leçon de physique expérimentale...* - *Paris*, Guerin, Delatour, Durand, 1775-1780, 6 vol. in 12°, con ritratto dell'autore e con tav. riuniti da diverse edizioni, cioè vol. 1°, 2° e 6° ediz. 8<sup>a</sup>, vol. 3° ediz. 7<sup>a</sup>, vol.

4° e 5° ediz. 6<sup>a</sup>, bazzana.

164. **Noya Carafa** (Duca di). Lettre à monsieur de Buffon sur la tourmaline. *Paris*, 1759, in 8°, con tav., mz. tela.

165. **Ozanam** (J.). Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques... - *Paris*, Michallet, 1691, in 4°, con tav., pelle.

166. **Ozanam** (J.). Altro esemplare. (D)

167. **Ozanam** (J.). Récréations mathématiques et physiques... Nouvelle édition. - *Paris*, Jombert, 1735, 4 vol. in 8°, con tav., bazzana.

168. **Palletta** (G.). Dissertazione sopra il quesito: Produrre nuove esperienze per dimostrare con più sicurezza, che l'Aria fissa sia applicabile con vantaggio o no in qualche sorta di malattie. - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1781, in 4°, squinternato.

169. **Paoli** (P.). Elementi d'Algebra. - *Pisa*, Gaetano Mugnarini, 1794, 2 tomi legati in un volume, in 8°, con tav., mz. perg.

170. **Pappo**. Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a *Federico Commandino* Urbinate in Latinum conversae et commentariis illustratae. - *Bononiae*, Typ. H. de Duccis, 1660, in fol., con ritratto equestre di Leopoldo Guglielmo d'Austria inc. in rame da *J. Troyen* dall'originale di *D. Teniers* e con fig., perg. (D)

171. **Pappiani** (A.). Della sfera armillare e dell'uso di essa nell'astronomia nautica e gnomonica. - *Firenze*, Bonducci, 1745, in 4°, con antiporta inc. in rame e tav., perg.

172. **Para du Phanjas** (abbé F.). Théorie des êtres sensibles... - *Paris*, i volumi primo, terzo, quarto : Barrois l'ainé, Cellot 1786 ; i volumi secondo e

quinto : Cellot, 1786, in 8°, intonsi, cart. Il quinto e ultimo volume, di supplemento, ha anche un suo titolo autonomo : *Théorie des nouvelles découvertes en genre de physique et de chymie...*

I volumi mancano dei fascicoli che contenevano le tavole.

173. **Pascal (B.)**. Oeuvres. - *Haye*, Detune, 1779, 5 vol. in 8°, con ritratto dell'autore, con tav., bazzana.

174. **Paulian (A. H.)**. Le guide des jeunes mathématiciens sur les Leçons de M. l'Abbé de la Caille par un ami de l'auteur. - *Avignon*, veuve Girard, Jean Aubert, 1776, in 8°, pelle. Il nome dell'autore non è presente nel volume.

175. **Paulian (A. H.)**. Dictionnaire de physique... Seconde édition... - *Nismes*, Gaude, 1773, 3 vol. in 8°, con tav., bazzana.

176. **Perini (L.)**. Geometria pratica per misurare terre, acque, fieni, pietre, grani, fabbriche ed altro... Edizione prima veneta... - *Venezia*, all'insegna di San Bassiano, 1750, in 8°, con fig., perg.

177. **Perrault (C.)**. Essais de physique... - *Paris*, Coignard, 1680-1688, 4 vol. in 12°, con tav., bazzana.

178. **Perugino (A. Pascoli di)**. Opere filosofiche, mediche et anatomiche di Alessandro Pascoli di Perugino divise in quattro volumi. - *Venezia*, Poletti, 1761, in 4°, con tav., perg. E' presente solo il volume primo.

179. **Peto (L.)**. De mensuris et ponderibus romanis et graecis cum his quae hodie Romae sunt collatis libri quinque. - *Venetiis*, Manutius, 1573, in 4°, con tav., perg. (D)

180. **Plinio**. Historia naturale di G. Plinio Secondo, tradotta per M. Lodovicho Domenichi. Con le additioni in margine, nelle quali o vengono segnate

le cose notabili, o citati altri autori, che nella stessa materia habbiano scritto, o dichiarati i luoghi difficili, o posti i nomi di geografia moderni. Di nuovo ristampate, riunite & corrette. Con le sue tavole copiosissime di tutto quel che nell'opera si contiene. - *Venetia*, appresso Gio. Battista Uscio, 1589, in 4°. (D)

181. **Riccati (V.); Saladini (G.)**. Institutiones analyticae a *Vincentio Riccato* et *Hieronymo Saladino*, collectae. - *Bononiae*, Typ. Sancti Thomae Aquinatis, 1765-68, 3 vol. in 4°, con tav., intonsi, mz. perg.

182. **Rohault (J.)**. Traité de physique. Nouvelle édition. - *Paris*, Desprez, 1705, 2 vol. in 12°, con fig., pelle.

183. **Roberti (G.)**. Miscellanea italica physico-mathematica. Collegit *Gaudentius Robertus*. - *Bononiae*, ex typ. Pisariana, 1692, in 8°, con fig., perg. Mancano il piatto superiore, il frontespizio e le tre carte di principio. Si tratta di una raccolta di opere di diversi autori.

184. **Romé de l'Isle (J.-B.)**. Metrologie, ou tables pour servir à l'intelligence des poids et mesures des anciens... - *Paris*, de l'Imprimerie de Monsieur, 1789, in 4°, con tav., bazzana.

185. **Ruffini (P.)**. Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto, parte prima. - *Bologna*, Stamperia di S. Tommaso D'Aquino, 1798, in 8°, con tav., mz. pelle.

186. **Saccheri (G.)**. Quaesita geometrica... - *Mediolani*, apud Marcum Antonium Pandulphum Malatestam, 1693. Vi è unito: **Nicolas (G.)**. De novis spiralibus exercitationes duae. - *Tolosae*, J. et G. Pech, 1693, in 4°, con tav., perg.

187. **Saladini (G.)**. Nuovo metodo delle proporzioni geometrica, aritmetica ed armonica di d. Girolamo Saladini. - *Bologna*, Stamperia di S. Tommaso

d'Aquino, in 8°, 1761. (D)

188. **Saladini (G.)**. Compendio d'analisi delle quantità finite... seconda edizione attentamente corretta ed accresciuta di alcune note e di un'appendice di *Filippo Castellani*. - *Napoli*, presso Giuseppe Maria Porcelli 1790, in 8°, con tav., perg.

189. **Sangallo (P.P. da)**. Esperienze intorno alla generazione delle zanzare. - *Firenze*, Vangelisti, 1679; v. n° 109.

190. **Saverien (A.)**. Dictionnaire universel de mathématique et de physique. - *Paris*, Rollin, 1753, 2 vol. in 4°, con tav., pelle. (D)

191. **Saverien (A.)**. Altro esemplare, pelle. (D)

192. **Scarella (G. B.)**. De magnete libri quatuor... - *Brixiae*, Rizzardi, 1759, 2 tomi in 4°, con tav., perg.

193. **Scarella (G. B.)**. Physicae generalis methodo mathematica tractatae... - *Brixiae*, Bossini, 1754-57, 3 vol. in 4°, con tav., perg.

194. **Scarella (G. B.)**. Altro esemplare, bazzana.

195. **Schenna (G. D. Bettoni di)**. Elementa psychologiae hydrostaticae et areometriae summatim exposita ... - *Romae*, ex officina Arcangelii Cataletti, 1781, in 8°, con tav., cart.

196. **Scherffer (C.)**. Institutionum... - *Vindobonae*, Trattner, 1770-77, 6 vol. in 4°, con tav., perg. ed uno, cart., di supplemento.

197. **Schott (G.)**. Physica curiosa sive mirabilia naturae et artis. - *Herbipoli*, Eudteri et Wolfgangi Junioris, 1662, in 4°, con tav., perg. (D)

198. **Scottoni (G.)**. Dissertazione sopra il quesito: Se in uno Stato di terreno fertile si debba favorire maggiormente l'estrazione delle materie prime, ovvero quella delle manifatture. - *Mantova*, per l'Erede di Alberto Pazzoni, 1781, in 4°, squinternato.

199. **Sigaud de la Fond (J. A.)**. Dictionnaire de physique. - *Paris*, Rue et Hôtel Serpente, 1781-82, 5 vol. in 8° di cui uno di supplemento, con tav., bazzana.

200. **Smith (R.)**. A compleat system of opticks. - *Cambridge*, Crownfield, 1738, due vol. in 4°, con tav., bazzana. (D)

201. **Smith (R.)**. Traité d'optique traduit de l'anglais. - *Brest*, Malassis, 1767, *Paris*, Durand, Jombert, 1783, compreso un vol. d'appendice 3 vol. in 4°, con tav., mz. pelle. (PD). E' presente solo l'appendice.

202. **Smith (R.)**. Cours complet d'optique traduit de l'anglais. - *Avignon*, V. Girard et Fr. Seguim, *Paris*, Jombert 1767, 2 vol. in 4°, con tav., bazzana. (D)

203. **Sografi (G.)**. Dissertazione sopra il quesito: Se nel caso di sicurezza del Medico, che vi sia raccolta di marcie in qualche parte del Corpo convenga l'uso della China China... - *Mantova*, per l'Erede di Alberto Pazzoni, 1779, in 4°, squinternato.

204. **Torraca (G.)**. De usu corticis peruviani in purulentae materiae collectionibus dissertatio... - *Mantuae*, Typis Haeredis Alberti Pazzoni, 1779, in 4°, squinternato.

205. **Valdastro (I.)**. Dissertazione sopra il quesito: Quali vantaggi e svantaggi abbiano rispetto alla Tragedia, e alla Commedia... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1792, in 4°, squinternato.

206. **Vassalli (A. M.)**. Lettere fisico-meteorologiche de' celeberrimi fisici *Senebier, de Saussurre, e Toaldo* con le risposte di *Anton Maria Vassalli*. - *Torino*, Stamperia Reale, 1789, in 8°. Il nome di Vassalli compare come autore nella prefazione.

207. **Viète (F.)**. Francisci Viète opera mathematica in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio Francisci à Schooten. - *Lugduni Batavorum*, ex officina Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, 1646, in folio. (D).

208. **Wilermoz (P.)**. Dissertazione sopra il quesito: Essendo dimostrato dall'esperienza essere necessaria all'Acqua una data preparazione, ed uno stato, onde possa ben operare la macerazione delle piante da Tiglio... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1788, in 4°, squinternato.

209. **Wolf (Ch.)**. Compendium elementorum matheseos universae... - Editio secunda. - *Lausannae et Genevae*, Bousquet, 1758, 2 vol., in 12°, con tav., perg.

210. **Zeviani (G.V.)**. Dissertazione sopra il quesito: Qual sia preferibile tra i rimedi preservativi dello Scorbuto, specialmente di terra. - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1769; v. n°11 bis.

211. **Zuliani (P.)**. Dissertazione sopra il quesito: Quali vantaggi o danni, e in quale stato d'acqua produca nel sistema generale d'un fiume la molteplicità... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1795, in 4°, squinternato.

212. *Encyclopédie méthodique. Dictionnaire de physique*. - *Paris*, Hotel de Thou t. I, Agasse t. II, III, IV, 1793-1822, 4 tomi in 7 volumi in 4°, cart. Le parti seconde dei tomi sono prive di frontespizi. Sembrano mancare i fascicoli contenenti le tavole. Nella prefazione l'opera viene presentata come quella parte concernente la fisica che era assente nella *Encyclopédie* di Diderot e D'Alembert.

Nel frontespizio del primo tomo, per quanto concerne gli autori, viene detto 'par MM. Monge, Cassini, Bertholon, Hassenfratz, etc. etc.'

213. Mémoires de mathématique et de physique tirez des registres de l'Académie Royale des Sciences. - *Paris*, Imprimerie Royale, 1692, in 4°, con tav., cart.

214. Memorie sopra la fisica e istoria naturale di diversi valentuomini. - *Lucca*, t. primo e secondo Salani e Giuntini, t. terzo Benedini 1747, t. quarto Giuntini, 1757, 4 vol. in 12°, con tav., mz. perg.

215. Tavole di ragguaglio per la riduzione dei pesi e misure che si usano in diversi luoghi del Granducato di Toscana al peso e misura vegliante in Firenze. - *Firenze*, Cambiagi 1782, in 4°, intonso, cart.

216. *Anonimo*. Dissertazione sopra il quesito: Come generino i vortici orizzontali, e verticali appiè degli Argini in corrosione... - *Mantova*, per l'erede di Alberto Pazzoni, 1786, in 4°, squinternato.

217. **Ignario**. Forze elettriche. - *Napoli*, De Simone, 1747. (D)

218. **Spiriti**. Brevi nozioni de' sistemi del mondo e della sfera. - 1788. (D)

### 3. CATALOGHI PER SOGGETTI

#### 3.1 CRITERI DI CATALOGAZIONE

Il materiale del fondo mal si adatta all'applicazione del sistema più diffuso attualmente utilizzato nella catalogazione, quello dell'American Mathematical Society. Alcuni tentativi hanno dato in effetti come esito la presenza di molte classi vuote e il



ripetersi eccessivo della presenza di alcune opere in classi differenti. Naturalmente questi effetti sono legati all'eccessiva modernità del criterio rispetto alle opere analizzate.

Gli stessi inconvenienti si sono manifestati con l'uso del sistema corrente tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento che ha il pregio però di corrispondere in qualche modo ai criteri di catalogazione di coloro che hanno costituito il fondo, cioè l'*Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques*.

Si è preferito allora utilizzare il criterio di classificazione utilizzato da Riccardi; nella sua *Biblioteca matematica* che si ritrovò ad analizzare materiale librario molto simile a quello del fondo e che viene dato in appendice.

Dato il numero di opere da classificare non sono state utilizzate le suddivisioni dei temi principali proposti da Riccardi; si sono introdotte invece due altri temi principali: il tema XXII dedicato alle opere di fisica in generale o con un carattere più specificatamente sperimentale e un tema XXIII dedicato al materiale non rientrante nei temi precedenti (si tratta di poche opere essenzialmente di filosofia, letteratura, storia naturale).

L'introduzione del tema XXIII si è resa necessaria in quanto i materiali del fondo presentano una natura più composita rispetto a quelli assai meglio selezionati della *Biblioteca matematica*.

Il tema XXII invece nasce dall'enucleazione di una parte del materiale del tema XII della *Biblioteca*. La loro unione restituisce, pertanto, il tema XII della Biblioteca stessa.

Il nuovo tema serve a caratterizzare meglio il materiale in larga misura proveniente dalla collezione Govi cui ovviamente erano molto care le opere di fisica sperimentale.

D'altro canto vi è una certa difficoltà nel classificare tra le opere di fisica matematica, ad esempio, la vasta produzione sui fenomeni elettrici e magnetici risalente alla seconda metà del Settecento. Proprio in questo periodo in effetti sembra affiorare una netta distinzione tra opere che fanno uso dell'apparato matematico legato al calcolo e opere invece che privilegiano l'esperimento.

Abbiamo così costituito due cataloghi: nel primo ad ogni argomento come individuato dal Riccardi vengono fatte corrispondere le opere secondo la numerazione progressiva del catalogo per autore; nel secondo ad ogni opere secondo la numerazione

progressiva del catalogo per autore, seguono gli argomenti pertinenti secondo la numerazione data nel primo catalogo.

La classificazione effettuata mette bene in evidenza una prevalenza (una sessantina di opere su circa 190) dei temi di fisica matematica (XII) e fisica generale e sperimentale (XXII) facilmente riconducibili ai gusti e agli interessi professionali di Govi.

### 3.2 CATALOGO ARGOMENTI-OPERE

- I            Scienze matematiche in generale  
              3; 11; 28; 39; 43; 56; 57; 70; 71; 76; 77; 90; 94; 101; 102; 107; 113;  
              139; 140; 146; 165; 166; 167; 174; 178; 190; 191; 196; 207; 209; 212;  
              213; 214.
  
- II           Aritmetica  
              52; 60; 83; 107; 128; 179; 184; 187; 214; 215.
  
- III          Geometria pura, elementare, superiore  
              7; 27; 37; 38; 58; 61; 62; 63; 64; 84; 86; 87; 111; 112; 134; 135; 136;  
              145; 160; 170; 186; 187.
  
- IV          Prospettiva  
              47; 93; 131.
  
- V           Analisi finita  
              14; 46; 67; 79; 80; 83; 114; 117; 142; 155; 156; 169; 185; 188; 208.
  
- VI          Geometria analitica  
              51.
  
- VII        Sezioni coniche

5; 33; 106; 137; 138.

VIII      Trigonometria piana e sferica  
25; 35; 36; 119; 120.

IX        Analisi superiore  
1; 23; 29; 34; 37; 51; 59; 66; 68; 72; 105; 115, 181.

X        Meccanica teorica e pratica  
2; 18; 20; 40; 65; 75; 77; 86; 91; 129; 133; 148.

XI        Idraulica teorica e pratica  
13; 16; 45; 69; 71; 74; 77; 89; 91; 108; 110; 141; 195; 211; 215.

XII       Fisica matematica  
4; 12; 21; 24; 31; 33; 48; 88; 89; 90; 96; 116; 121; 127; 133, 145; 149;  
152; 153; 154; 157; 158; 167; 172; 173; 183; 190; 191; 193; 194; 195;  
200; 201; 202.

XIII      Cosmografia  
49; 103; 104; 123; 124; 147.

XIV      Astronomia  
17; 30; 32; 50; 55; 97; 103; 130; 171.

XV       Cronologia matematica  
19; 118.

XVI       Gnomonica  
112; 118; 120; 126.

XVII      Geometria pratica e geodesia

18; 27; 42; 125; 131; 176.

XVIII      Geografia matematica  
120.

XIX        Nautica  
171.

XX         Applicazione delle matematiche all'arte militare  
11.

XXI        Applicazioni delle matematiche alle arti  
47; 131.

XXII       Scienze fisiche in generale e fisica sperimentale  
8; 9; 24; 41; 90; 122; 132; 143; 144; 149; 150; 151; 159; 161; 162; 163;  
167; 172; 173; 175; 177; 182; 190; 191; 192; 197; 199; 206; 212; 217.

XXIII      Altro  
6; 10; 15; 22; 24; 26; 31; 44; 53; 54; 81; 82; 91; 92; 95; 98; 99; 100;  
102; 109; 139; 164; 168; 172; 173; 178; 180; 189; 198; 203; 204; 205;  
208; 210; 218.

### 3.3 CATALOGO OPERE-ARGOMENTI

- |             |                      |
|-------------|----------------------|
| 1. IX       | 24. XII, XXII, XXIII |
| 2. X        | 25. VIII             |
| 3. I        | 26. XXIII            |
| 4. XII      | 27. III, XVII        |
| 5. VII      | 28. I                |
| 6. XXIII    | 29. IX               |
| 7. III      | 30. XIV              |
| 8. XXII     | 31. XII, XXIII       |
| 9. XXII     | 32. XIV              |
| 10. XXIII   | 33. VII, XII         |
| 11. I, XX   | 34. IX               |
| 12. XII     | 35. VIII             |
| 13. XI      | 36. VIII             |
| 14. V       | 37. III, IX          |
| 15. XXIII   | 38. III              |
| 16. XI      | 39. I                |
| 17. XIV     | 40. X                |
| 18. X, XVII | 41. XXII             |
| 19. XV      | 42. XVII             |
| 20. X       | 43. I                |
| 21. XIV     | 44. XXIII            |
| 22. XXIII   | 45. XI               |
| 23. IX      | 46. V                |

- |     |         |      |             |
|-----|---------|------|-------------|
| 47. | IV, XXI | 79.  | V           |
| 48. | XII     | 80.  | V           |
| 49. | XIII    | 81.  | XXIII       |
| 50. | XIV     | 82.  | XXIII       |
| 51. | VI, IX  | 83.  | II, V       |
| 52. | II      | 84.  | III         |
| 53. | XXIII   | 85.  | X           |
| 54. | XXIII   | 86.  | III         |
| 55. | XIV     | 87.  | III         |
| 56. | I       | 88.  | XII         |
| 57. | I       | 89.  | XI, XII     |
| 58. | III     | 90.  | I, XI, XXII |
| 59. | IX      | 91.  | X, XI       |
| 60. | II      | 92.  | XXIII       |
| 61. | III     | 93.  | IV          |
| 62. | III     | 94.  | I           |
| 63. | III     | 95.  | XXIII       |
| 64. | III     | 96.  | XII         |
| 65. | X       | 97.  | XXIII       |
| 66. | IX      | 98.  | XXIII       |
| 67. | V       | 99.  | XXIII       |
| 68. | IX      | 100. | XXIII       |
| 69. | XI      | 101. | I           |
| 70. | I       | 102. | XXIII       |
| 71. | XI      | 103. | XIII, XIV   |
| 72. | IX      | 104. | XIII        |
| 73. | I       | 105. | IX          |
| 74. | XI      | 106. | VII         |
| 75. | X       | 107. | I, II       |
| 76. | I       | 108. | XI          |
| 77. | X, XI   | 109. | XXIII       |
| 78. | I       | 110. | XI          |

- |                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| 111. III              | 143. XXII         |
| 112. XVI              | 144. XXII         |
| 113. I                | 145. III          |
| 114. V                | 146. I            |
| 115. IX               | 147. XIII         |
| 116. XII              | 148. X            |
| 117. V                | 149. XII, XXII    |
| 118. XVI              | 150. XXII         |
| 119. VIII             | 151. XXII         |
| 120. VIII, XVI, XVIII | 152. XII          |
| 121. XII              | 153. V            |
| 122. XXII             | 154. XII          |
| 123. XIII             | 155. V            |
| 124. XIII             | 156. V            |
| 125. XVII             | 157. XII          |
| 126. XVI              | 158. XII          |
| 127. XII              | 159. XXII         |
| 128. II               | 160. III          |
| 129. X                | 161. XXII         |
| 130. XIV              | 162. XXII         |
| 131. IV, XVII, XXI    | 163. XXII         |
| 132. XXII             | 164. XXIII        |
| 133. X, XII           | 165. I            |
| 134. III              | 166. I            |
| 135. III              | 167. I, XII, XXII |
| 136. III              | 168. XXIII        |
| 137. VII              | 169. V            |
| 138. VII              | 170. III          |
| 139. I, XXIII         | 171. XIV, XIX     |
| 140. I                | 172. XII, XXII    |
| 141. XI               | 173. XXII         |
| 142. V                | 174. I            |

- |                   |            |
|-------------------|------------|
| 175. XXII         | 198. XXIII |
| 176. XVII         | 199. XXII  |
| 177. XXII         | 200. XII   |
| 178. I, XXIII     | 201. XII   |
| 179. II           | 202. XII   |
| 180. XXIII        | 203. XXIII |
| 181. IX           | 204. XXIII |
| 182. XXII         | 205. XXIII |
| 183. XII          | 206. XXII  |
| 184. II           | 207. I     |
| 185. V            | 208. XXIII |
| 186. III          | 209. I     |
| 187. II, III      | 210. XXIII |
| 188. V            | 211. XI    |
| 189. XXIII        | 212. XXII  |
| 190. I, XII, XXII | 213. I     |
| 191. I, XII, XXII | 214. I     |
| 192. XXIII        | 215. II    |
| 193. XII          | 216. XI    |
| 194. XII          | 217. XII   |
| 195. XI, XII      | 218. XXIII |
| 196. I            |            |
| 197. XXII         |            |



### 3.4 APPENDICE: IL SISTEMA DI CLASSIFICAZIONE DI PIETRO RICCARDI.

Nella presente Appendice diamo l'indice della classificazione per materie individuato da Riccardi nella sua *Biblioteca matematica*. Con un numero romano vengono indicate i temi principali; con un numero arabo gli argomenti raccolti nel tema stesso.

#### I. Scienze Matematiche in generale.

1. Dissertazioni sulle Scienze Matematiche in generale
2. Divisioni e classificazione delle diverse parti delle matematiche
3. Memorie ed opere che trattano della storia delle scienze matematiche in generale
4. Biografie matematiche generali e particolari
5. Filosofia matematica ed applicazione alla teologia
6. Enciclopedie e Dizionarij delle matematiche in generale
7. Opere contenenti i primi principj delle diverse parti delle matematiche. Quadrivio
8. Didascalica, scritti intorno allo studio ed allo insegnamento delle matematiche
9. Saggi scolastici su diverse parti delle matematiche
10. Opere contenenti un corso di studi matematici
11. Miscellanee ed opere che contengono varie parti delle matematiche
12. Raccolte di problemi e teoremi intorno a varie parti delle matematiche
13. Lettere diverse, epistolari e collezioni di lettere matematiche
14. Atti Accademici e collezioni di memorie accademiche
15. Periodici
16. Collezioni di opere varie di un medesimo autore
17. Traduzioni e comenti alle collezioni di opere degli antichi autori di matematiche
18. Dissertazioni polemiche su vari argomenti matematici

#### II. Arimetica.

1. Scritti sull'arimetica in generale e sulla storia di questa scienza
2. Traduttori e commentatori delle opere arimetiche antiche

3. Abbachi e ristretti di arimmetica
4. Trattati e compendi di arimmetica
5. Opere e memorie sopra diversi argomenti di arimmetica. Algoritmo
6. Tavole di conti fatti
7. Macchine aritmetiche
8. Numeri cabalistici
9. Giuochi numerici. Lotto
10. Arimmetica politica e statistica. Tavole di vitalità
11. Tariffe ed applicazioni arimmetiche alle imposizioni, dazi, gabelle ecc.
12. Trattati di arimmetica mercantile. Cambj
13. Memorie diverse di arimmetica mercantile
14. Scrittura semplice e doppia, e tenuta dei libri di amministrazione
15. Calcoli e Tavole d'interesse e di sconto
16. Tariffe commerciali e tavole dei cambi mercantili
17. Pesi e misure. Tavole di ragguaglio
18. Monete. Tavole per la valutazione e ragguaglio delle monete

### **III. Geometria pura elementare e superiore.**

1. Scritti sulla geometria in generale, e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici
3. Traduzioni, illustrazioni e commenti alle opere degli antichi geometri
4. Traduzioni, compendj ed illustrazioni della geometria di Euclide
5. Traduzioni di trattati di geometria di autori stranieri
6. Trattati originali di geometria
7. Opere e memorie sopra diversi argomenti di geometria elementare
8. Poligonometria. Trasformazione delle figure rettilinee
9. Problema delle due medie proporzionali e della duplicazione del cubo
10. Problema della trisezione dell'angolo
11. Quadratura del cerchio e misurazione della sua area
12. Memorie ed opere diverse di geometria superiore
13. Rappresentazione grafico-geometrica dei fatti e dei dati numerici
14. Geometria del compasso
15. Poemi geometrici

**IV. Prospettiva.**

1. Trattati di prospettiva teorica e pratica
2. Memorie diverse di prospettiva

**V. Analisi finita.**

1. Scritti sull'Algebra in generale e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici di Analisi finita
3. Trattati di algebra
4. Scritti sopra diversi argomenti algebrici
5. Teorica delle equazioni e loro risoluzione. Equazioni numeriche
6. Imaginarj
7. Teoria delle progressioni e delle serie
8. Analisi indeterminata
9. Calcoli e formole d'interesse
10. Analisi applicata alla giurisprudenza ed alle scienze politico-economiche
11. Calcolo delle probabilità. Errori probabili. Giuochi d'azzardo
12. Teorica dei Logaritmi
13. Tavole logaritmiche

**VI. Geometria analitica.**

1. Scritti in generale sulla geometria analitica e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici
3. Trattati di Geometria analitica
4. Scritti e memorie diverse di Geometria analitica

**VII. Sezioni coniche.**

1. Scritti sulle sezioni coniche in generale e sulla loro storia
2. Traduzioni ed illustrazioni degli antichi trattati sulle sezioni coniche
3. Trattati di sezioni coniche
4. Memorie diverse intorno alle coniche. Descrizione, rettificazione e quadratura delle coniche

**VIII. Trigonometria piana e sferica.**

1. Scritti sulla trigonometria in generale e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici
3. Compendj e trattati di trigonometria piana e sferica
4. Memorie diverse di trigonometria piana e sferica
5. Tavole trigonometriche e logaritmico-trigonometriche

**IX. Analisi superiore.**

1. Scritti sulla teorica dei limiti
2. Scritti sulla teorica degli indivisibili
3. Scritti sul calcolo delle flussioni
4. Scritti sul calcolo delle variazioni
5. Scritti sul calcolo delle funzioni analitiche
6. Scritti sull'analisi superiore in generale e sulla storia di questa scienza
7. Compendi e trattati di analisi infinitesimale
8. Memorie sopra diversi argomenti di analisi superiore
9. Scritti di analisi superiore e sulle teoriche delle curve e delle superficie
10. Scritti concernenti la teorica dei massimi e minimi

**X. Meccanica teorica e pratica.**

1. Scritti sulla Meccanica in generale e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici
3. Traduzioni ed illustrazioni alle meccaniche di Aristotele
4. Compendj e trattati di meccanica
5. Scritti e memorie sopra diversi argomenti di meccanica
6. Centrobarica
7. Meccanica animale
8. Scritti sulla questione intorno alle forze vive
9. Teorica delle velocità virtuali
10. Scritti intorno a macchine ed a congegni meccanici

11. Costruzione degli oriuoli meccanici; oriuoli a polvere (Clessidre), ad acqua, a pendolo, a molla
12. Scritti intorno a macchine mosse dal vapore
13. Scritti intorno alla costruzione dei mulini. Appendice. Macchine agricole ed industriali
14. Giuochi meccanici
15. Descrizione meccanica delle curve
16. Scritti intorno al pericolo di lanciarsi da un carro mentre si muove
17. Scritti speciali intorno al moto perpetuo
18. Scritti e trattati di meccanica pratica. Arti meccaniche
19. Meccanica applicata all'architettura
20. Scritti su diverse operazioni meccaniche. Trasporto di obelischi

#### **XI. Idraulica teorica e pratica.**

1. Scritti sulla idraulica in generale e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici
3. Trattati d'idraulica teorica e pratica
4. Scritti e memorie su diversi argomenti d'idraulica
5. Memorie diverse d'idraulica pratica. Idrotecnia ed Idrografia
6. Strumenti e macchine idrauliche. Giochi d'acqua
7. Collezioni di opere idrauliche
8. Idrometria propriamente detta. Tavole paraboliche
9. Regolazione delle acque
  - a) Fiumi e torrenti
  - b) Canali navigabili
  - c) Laghi
  - d) Sbocco dei fiumi in mare
  - e) Fontane e pozzi trivellati
  - f) Scolì
  - g) Irrigazioni
10. Giurisprudenza delle acque
  - a) Statuti, leggi ecc.
  - b) Questioni private d'acque
  - c) Divisione delle alluvioni

11. Costruzioni idrauliche
  - a) Porti
  - b) Ponti. Ponti sospesi
  - c) Costruzioni diverse. Pescaje
12. Scritti sopra diversi fiumi in particolare
  - a) Fiumi Romani – Tevere – Acquedotti Romani – Paludi Pontine
  - b) Fiumi della Toscana – Arno – Chiana – Serchio. Taglio della macchia di Viareggio
  - c) Po e suoi confluenti – Regolazione del Reno – Acque Ferraresi e Mantovane
  - d) Fiumi della Romagna ed in particolare del Ravennate
  - e) Fiumi delle provincie venete
  - f) Mare Adriatico – Laguna di Venezia
  - g) Valle dell'Adige – Fiumi del Tirolo e della Germania
  - h) Regolazione delle acque della Lombardia e del Piemonte – Naviglio di Milano
  - i) Mare Mediterraneo
  - j) Scritti sul Taglio dell'istmo di Suez
13. Carte idrografiche

## **XII. Fisica matematica.**

1. Scritti sulla fisica matematica in generale, e sulla storia di questa scienza
2. Saggi scolastici
3. Traduzioni, appunti ed illustrazioni alla fisica d'Aristotele e dei peripatetici
4. Enciclopedie antiche fisico-matematiche. Poemi fisici
5. Trattati di filosofia naturale e di fisica matematica
6. Memorie diverse di fisica matematica e di filosofia naturale
7. Gravità
  - a) Opere e memorie diverse su questo argomento
  - b) Attrazione
8. Peso specifico – Principio d'Archimede
9. Pendolo
10. Peso dell'aria – Barometro, vuoto
11. Scritti e memorie diverse di Aereometria e di Aereostatica
12. Pneumatica – Macchine pneumatiche – Macchine spiritali
13. Aereonautica

14. Calorico – Trattati in generale e memorie particolari – Fiamma
15. Calor terrestre – Calore solare – Calore lunare
16. Termometro ed Igrometro
17. Specchi ustori
18. Ottica – Scritti sulla storia dell'ottica e commenti agli antichi autori
19. Saggi scolastici di ottica
20. Trattati di ottica
21. Scritti e memorie diverse di ottica
22. Strumenti ottici. Occhiali e Cannocchiali
23. Camera oscura. Lanterna magica, ed apparecchi analoghi
24. Specchi riflettori della luce
25. Iride
26. Acustica – Trattati generali e memorie diverse. Applicazioni alla musica
27. Strumenti acustici. Ecometria
28. Magnetismo ed elettricità
  - a) Trattati generali e memorie particolari
  - b) Parafulmini
29. Mineralogia geometrica
30. Enciclopedie fisico-meccaniche

### XIII. Cosmografia.

1. Scritti sulla Cosmografia in generale e sulla storia di questa scienza
2. Trattati di Cosmografia
3. Memorie diverse di Cosmografia
4. Cosmogonia biblica
5. Meteorologia – Traduzioni ed illustrazioni dei libri di meteorologia di Aristotele
6. Trattati e scritti di meteorologia – Osservazioni meteorologiche
7. Pronostici, Almanacchi ed effemeridi meteorologiche
8. Meteore. Aurore boreali, iridi, paraselene, bolidi, aereoliti ecc.
9. Strumenti di Meteorologia e di Cosmografia
10. Meteorologia. Astronomia applicata all'agricoltura
11. Fenomeni tellurici e meteorologici
  - a) Venti – Turbini – Diluvio
  - b) Vulcani e Tremuoti

- c) Origine dei fonti, fiumi, laghi, mare
- d) Flusso e riflusso del mare

#### XIV. Astronomia.

1. Astrologia. Scritti intorno all'Astrologia in generale ed alla sua storia
2. Trattati di astrologia
3. Tavole astrologiche
4. Pronostici, vaticinj ed almanacchi astrologico-astronomici
5. Scritti e memorie diverse di Astrologia
6. Astrologia applicata alla medicina
7. Astronomia. Discorsi sull'Astronomia in generale e sulla sua storia
8. Saggi scolastici
9. Astronomi antichi
  - a) Collezioni delle opere degli antichi astronomi
  - b) Traduzioni, illustrazioni e commenti alle opere degli antichi astronomi
  - c) Traduzioni, illustrazioni e commenti ai trattati astronomici di Aristotele
  - d) Traduzioni, illustrazioni e commenti alle opere astronomiche di Tolomeo
10. Compendj e trattati di astronomia
11. Poemi e componimenti poetico-astronomici
12. Memorie diverse di astronomia. Moto dei corpi celesti
13. Osservatorj astronomici. Meridiane
14. Astrolabi ed altri strumenti astronomici
15. Osservazioni astronomiche diverse
16. Pianeti
17. Satelliti
18. Luna
19. Sole
20. Stelle fisse. Via lattea. Costellazioni. Descrizione e divisione della volta celeste
  - a) Primo mobile. Stelle ecc.
  - b) Ottava sfera
21. Comete
22. Memorie diverse di astronomia fisica. Macchie solari
23. Fenomeni ottico-astronomici



- a) Rifrazione
  - b) Aberrazione
  - c) Luce zodiacale
  - d) Fenomeni diversi
24. Eclissi
25. Passaggi di Venere e di Mercurio davanti al sole
- a) Passaggio di Venere
  - b) Passaggio di Mercurio
26. Trattati relativi alla sfera
- a) Scritti intorno alla sfera
  - b) Traduzioni e commenti alla sfera di Proclo
  - c) Traduzioni e commenti alla sfera di Teodosio
  - d) Traduzioni e commenti alla sfera di Tolomeo
  - e) Traduzioni e commenti della sfera del Sacrobosco
  - f) Planisferi
  - g) Collezione di sfere diverse
  - h) Apparecchi sferologici. Sfera armillare
27. Ore. Tavole orarie
28. Effemeridi e tavole astronomiche. Scritti sulle medesime
29. Costituzione dell'Universo
- a) Cosmogonia biblica
  - b) Memorie ed opere diverse su la costituzione dell'universo
  - c) Obliquità dell'Eclittica. Teoria dell'attrazione. Nutazione
30. Scritti relativi alla questione sul moto della terra e sul sistema copernicano
31. Scritti diversi di meccanica celeste

#### **XV. Cronologia matematica.**

- 1. Scritti sulla Cronologia in generale e sulla sua storia
- 2. Trattati di Cronologia sacra e profana
- 3. Lunari e calendari sacri e profani
- 4. Calendario Giuliano o Romano
- 5. Scritti precedenti la riforma del Calendario
- 6. Scritti concernenti la riforma Gregoriana del Calendario
- 7. Scritti sul calendario repubblicano-francese

8. Memorie ed opere diverse di cronologia matematica
9. Divisione del tempo. Scritti sugli orologi italiani e francesi

#### **XVI. Gnomonica.**

1. Scritti sulla Gnomonica in generale e sulla storia di questa scienza
2. Compendj e trattati di Gnomonica
3. Tavole gnomoniche
4. Strumenti orologiografi
5. Tracciamento della meridiana
6. Scritti e memorie diverse sopra argomenti attinenti alla Gnomonica

#### **XVII. Geometria pratica e Geodesia.**

1. Scritti di geometria pratica in generale e relative memorie storiche
2. Traduzioni e comenti agli antichi trattati di geometria pratica
3. Scritti degli agrimensori romani
4. Trattati di Geometria pratica e di Agrimensura
- 4bis. Strumenti di geometria pratica e di agrimensura
5. Memorie diverse di Agrimensura e di Geometria pratica
6. Opere speciali concernenti la misurazione dei fabbricati
7. Trattati speciali e memorie concernenti l'altimetria e la livellazione
8. Scritti sopra gli strumenti del livellare
9. Altimetria barometrica
10. Scritti speciali sulla stereometria e sulla stereotomia
11. Scritti speciali di voltimetria
12. Scritti sulla tenuta dei vasi vinarj. *Cadometria*
13. Scritti di Metrologia
14. Geodesia propriamente detta
  - a) Divisione delle alluvioni
  - b) Confini e questioni relative alle proprietà stabili
15. Perizia
  - a) Scritti relativi all'Estimo
  - b) Perizia di lavori di costruzioni
  - c) Catasto

16. Scritti speciali sopra il disegno topografico e su quello d'architettura
17. Scritti sugli istrumenti grafici e meccanici
  - a) Compasso di proporzione
  - b) Compassi Galileiani e successivi
  - c) Pantografi ed analoghi apparecchi
  - d) Planimetri
  - e) Strumenti per la descrizione meccanica delle curve
  - f) Strumenti grafici diversi
18. Scritti intorno al rilievo topografico ed alle carte topografiche
19. Scritti sul tracciamento e costruzione delle strade
20. Scritti e tipi relativi a piante di città
21. Geodesia. Scritti sulla storia della geodesia
22. Triangolazioni geodetiche. Misura delle basi e degli archi meridiani e di paralleli
23. Scritti sulla determinazione della grandezza e della figura della terra

#### **XVIII. Geografia matematica.**

1. Discorsi in generale
2. Memorie sulla storia della geografia
3. Traduttori e commentatori della geografia di Tolomeo
4. Trattati di Geografia matematica
5. Saggi scolastici
6. Opere e memorie che riguardano la determinazione della latitudine e della longitudine dei luoghi terrestri
7. Memorie diverse di Geografia matematica
8. Mappamondi. Corografia e Cartografia matematica

#### **XIX. Nautica.**

1. Scritti sulla nautica in generale e sulla sua storia. Dizionari
2. Saggi scolastici
3. Trattati di scienza navale. Appendice. Arte del nuoto
4. Scritti e memorie sopra diversi argomenti di scienza navale
5. Determinazione della latitudine e longitudine in mare
6. Bussola ed altri strumenti nautici

7. Carte geometriche del mare. Portolani
8. Costruzioni navali. Macchine ecc.

#### **XX. Applicazione delle matematiche all'arte militare.**

1. Scritti sull'arte militare in generale e sulla sua storia
2. Scritti speciali relativi alla storia dell'arte militare
3. Dizionari
4. Scritti e collezioni diverse di arte militare in generale
5. Scritti contenenti regole matematiche per disporre gli uomini in battaglia
6. Architettura militare. Scritti sull'architettura militare in generale e sua storia
7. Trattati di fortificazione e memorie sull'architettura militare
8. Artiglieria e strumenti da guerra. Scritti storici
9. Trattati di artiglieria e di armi da fuoco
10. Scritti e memorie diverse di artiglieria e di balistica
11. Pirotecnia
12. Macchine belliche. Armi diverse

#### **XXI. Applicazioni delle matematiche alle arti.**

1. Discorsi in generale
2. Dizionari di architettura
3. Traduttori ed illustratori di Vitruvio
4. Architettura matematica
5. Applicazioni della prospettiva alle belle arti
6. Criptografia. Rebus
7. Cennologia. Istruzione dei sordo-muti. Telegrafia
8. Descrizione geometrica delle lettere dell'alfabeto
9. Descrizione della voluta

#### 4. ELENCHI DELLE ATTESTAZIONI DI POSSESSO

##### 4.1 CRITERI DI CATALOGAZIONE

Abbiamo dato innanzi tutto in ordine alfabetico l'elenco dei possessori, di cui risulta presente nei testi del fondo un'attestazione di appartenenza antecedente all'inclusione dell'opera nei gabinetti della Facoltà di Scienze Matematiche specificando tra parentesi la tipologia del segno di possesso (firma, *ex libris* o altro). A ciascun possessore fa riscontro l'elenco delle opere possedute, per le quali si è fatto riferimento alla numerazione del catalogo per autore.

Dopo questo elenco viene dato un secondo elenco, sempre seguendo l'ordine alfabetico dei possessori e la numerazione del catalogo per autore, che rende conto delle (poche) attestazioni di possesso multiple; naturalmente in tale elenco ricompaiono segnalate le attestazioni date singolarmente nel primo elenco.

Va precisato che in alcuni casi erano presenti firme poco leggibili e *ex libris* non decifrabili e per tale motivo ne è stata omessa la segnalazione.

Data la dipendenza, già sottolineata del fondo dalla collezione Govi-Davis e più specificatamente dalla sezione Govi (l'unica la cui presenza nel fondo indipendentemente dalle attestazioni di possesso, sia effettivamente riscontrabile nel catalogo della collezione) abbiamo ritenuto opportuno segnalare, utilizzando ancora la numerazione del catalogo per autore, la presenza delle opere in tale sezione.

##### 4.2 ELENCO DELLE ATTESTAZIONI DI POSSESSO

AMADEI A. (firma): 71

BELLANI Pietro; 134

CACCIOPPOLI F. (firma): 157

CAETANI Francesco (firma): 39

CAMERUCCI R. (firma): 2

DAVIS Alexander Henry (*ex libris*): 10; 24; 38; 50; 56; 81; 82; 85; 105; 192

FACIPECORA PAVESI Antonio (*ex libris*): 157

FERGOLA N.<sup>4</sup> (firma): 91

GIOVINO Saverio: 182

GOVI Gilberto (firma, talora timbro a secco): 8; 9; 21; 48; 68; 79; 80; 90; 91; 105; 106; 118; 121; 143; 144; 149; 162; 163; 181; 215

MACCIUCCA VARGAS<sup>5</sup> Francesco (*ex libris*): 20

MACCIUCCA VARGAS<sup>6</sup> Tommaso (*ex libris*): 115

RONDININI Natale (firma): 42

SIACCI Francesco<sup>7</sup> (firma): 169

<sup>4</sup> Si tratta quasi certamente di Nicolò Fergola il noto matematico napoletano fondatore della scuola sintetica. Su di lui si vedano F. Amodeo *Vita matematica napoletana*, v. I, Napoli, Giannini, 1905 e G. Ferraro, F. Palladino, *Il Calcolo sublime di Eulero e Lagrange esposto col metodo sintetico nel progetto di Nicolò Fergola*, Napoli, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, La Città del Sole, 1995.

<sup>5</sup> Francesco Vargas Macciucca (1699-1785) fu un celebre collezionista di libri napoletani; la sua collezione proseguita dal figlio Tommaso (1760-1845) fu una delle più ampie ed ammirate della seconda metà del Settecento e ne rimangono varie descrizioni; a tale proposito si veda, ad esempio L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, *La costituzione*, citata in n. 1, nota 31. Notiamo esplicitamente che il volume 20 su cui figura l'*ex libris* in questione è presente nella sezione Govi del catalogo della collezione Govi-Davis citato in n. 2 al numero 953 ed è segnalata la presenza di tale *ex libris*. Sulla figura di Francesco Vargas Macciucca e su un suo importante carteggio va ricordato ancora F. Strazzullo, *Il carteggio Martorelli-Vargas Macciucca* in F. Strazzullo (curatore) *Settecento napoletano, documenti* v. I, Napoli, Liguori, 1982 e v. II *ibidem* 1984, v. II pp. 6-367.

Una descrizione del clima che si respirava nella sua biblioteca, riportata anche nell'opera ora citata, fu data pure dal figlio Tommaso nella *Biografia degli uomini illustri del regno di Napoli*, t. I Napoli 1813 presso Nicola Gervasi calcografo, pp. 186-187:

"... nella sua conversazione, che vera accademia potea dirsi, al tramontar del sole riunivansi vicendevolmente Martorelli, Mazzucchi, Ignarra, Serao, Domenico e Giuseppe Cirillo, Daniele, Caulino, Galante, Morisani, Filangieri, insomma i genj più sublimi della nazione, oltre i tanti stranieri e tutti si davano un piacere di essere in sua compagnia, nella stanza della sua fornitissima Biblioteca, della quale sortivano ammirati della sua vasta e profonda letteratura."

<sup>6</sup> Si veda la nota precedente.

<sup>7</sup> Si tratta di Francesco Siacci (1839-1907), ordinario di Meccanica Razionale all'Università di Napoli a cavallo tra l'Ottocento e il Novecento. Su di lui cfr. G. Gatto, *Storia di una "Anomalia"*, cit. in n. 1. Il libro fu donato, come si evince da una dedica, da Siacci a Ernesto Cesàro suo collega a Napoli. Esso è stato acquisito dal Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" insieme all'intero fondo Cesàro. Sull'acquisizione di tale fondo si veda L. Carbone, G. Cardone, F. Palladino, *Il fondo Cesàro*:

SOLARO VILLANOVA Francesco (firma): 63

TELESIO<sup>8</sup> Luigi (firma): 174

TOLOMEI BIFFI Matteo (firma): 60

VANNI<sup>9</sup> Giovan Francesco (firma): 109

#### 4.3 ELENCO DELLE ATTESTAZIONI DI POSSESSO MULTIPLE

CACCIOPPOLI-FACIPECORA: 157

DAVIS-GOVI (*ex libris* e firma): 105

GOVI-VANNI (firma): 109

#### 4.4 OPERE PRESENTI NEL CATALOGO DELLA COLLEZIONE GOVI-DAVIS (SEZIONE GOVI)

Sono presenti esplicitamente nel catalogo della collezione GOVI-DAVIS le opere contrassegnate dai seguenti numeri:

1; 2; 4; 5; 12; 13; 14; 17; 18; 19; 20; 22; 24; 25; 26; 27; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 46; 47; 48; 49; 50; 51; 52; 53; 54; 56; 57; 58; 59; 60; 62; 65; 66; 68; 69; 73; 75; 76; 77; 78; 79; 80; 85; 88; 89; 90; 91; 97; 98; 99; 100; 101; 102; 103; 104; 105; 106; 107; 109; 111; 112; 113; 114; 115; 117; 118; 119; 120; 121; 122; 123; 124; 125; 126; 127; 129; 130; 131; 132; 133; 134; 135; 137; 139; 140; 141; 142; 143;

---

*costituzione, recupero e consistenza*, "Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche matematiche di Napoli" s. IV, v. LXIV (1997) pp. 217-278.

<sup>8</sup> Luigi Telesio fu un padre oratoriano (la firma è seguita dalla dizione "dell'Oratorio"). Su di lui si veda F. Amodeo, *Vita Matematica*, cit. in n. 4.

<sup>9</sup> Si tratta quasi certamente del padre gesuita Giovanni Francesco Vanni (la firma è preceduta dalla dizione "dono del p."). Il Vanni nacque a Lucca nel 1638 e vestì l'abito della compagnia nel 1653. Su di lui si possono vedere De Backer, *Bibliothèque des écrivains de la Compagnie de Jésus*, Liège, 1851-61, t. IV, p. 715; Sommervogel, *Bibliothèque de la Compagnie de Jésus*, Bruxelles-Paris, 1890-1900, vol. VIII, pp. 454-5.

144; 146; 147; 148; 149; 150; 151; 152; 153; 154; 155; 157; 159; 160; 161; 162; 163; 164; 165; 166; 167; 170; 171; 172; 173; 175; 176; 177; 179; 181; 182; 183; 184; 186; 189; 190; 191; 192; 193; 194; 196; 197; 199; 200; 201; 202; 206; 209; 212; 213; 214; 215.

Sembrano presenti nel catalogo della collezione Govi-Davis raccolte collettivamente in un lotto eterogeneo (individuato dal numero 3949) le opere contrassegnate dai seguenti numeri:

10; 15; 16; 44; 71; 74; 81; 82; 95; 108; 110; 168; 198; 203; 204; 205; 208; 210; 211; 216.

Si tratta in effetti di un gruppo di dissertazioni su temi proposti per concorso dalla Reale Accademia di Scienze e Belle Lettere di Mantova, presentate e coronate dall'Accademia stessa.

## 5 REPERTORIO ICONOGRAFICO

### 5.1 CRITERI DI SCELTA

In questa sezione si vogliono illustrare visivamente i volumi presenti nel fondo con una scelta abbastanza ampia di immagini.

La scelta naturalmente rimane opinabile; vale però la pena di precisare che si è cercato di rappresentare i vari aspetti della collezione sia di forma sia di contenuto ma privilegiando l'aspetto estetico.

Si forniscono così esempi numerosi di frontespizi, incisioni, tavole e tavole numeriche.

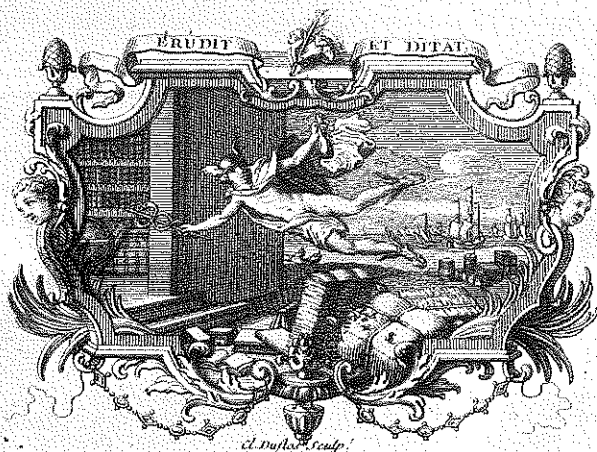
Segnaliamo infine che il numero che figura su ciascuna immagine rinvia al catalogo delle opere in ordine alfabetico per autore. Osserviamo esplicitamente che una delle illustrazioni concernente l'opera individuata dal numero 56 rappresenta l'*ex libris* di Davis, mentre sull'illustrazione che rappresenta il frontespizio dell'opera individuata dal numero 163 figura la firma di Gilberto Govi.



# TRAITÉ DE DYNAMIQUE,

DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE  
& du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une manière nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque.

*Par M. d'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences.*



A PARIS,

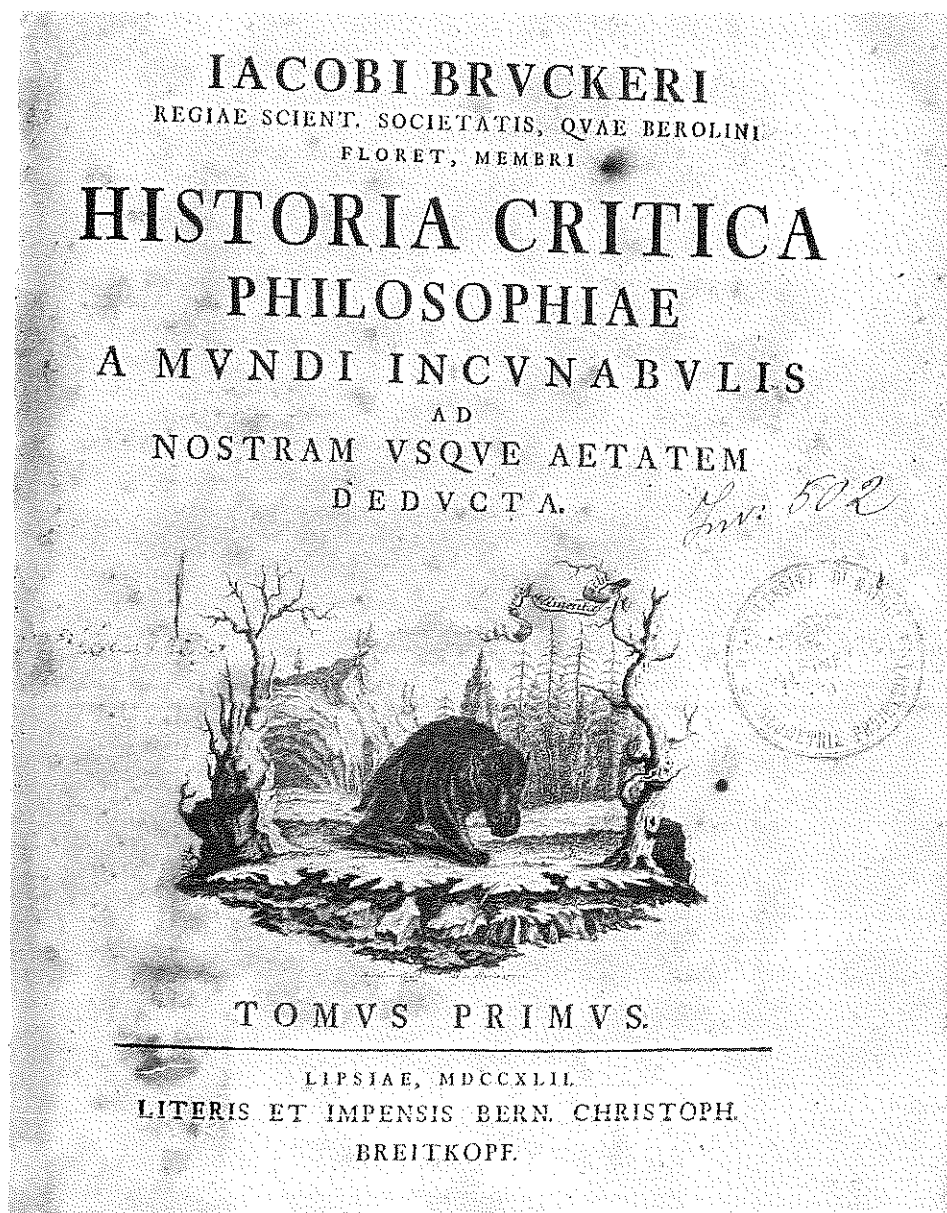
Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue Saint Jacques, à la Plume d'or,

---

MDCCXLIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

*J. R. Camille*







GEOMETRIA PRATICA Giuseppe Filosi

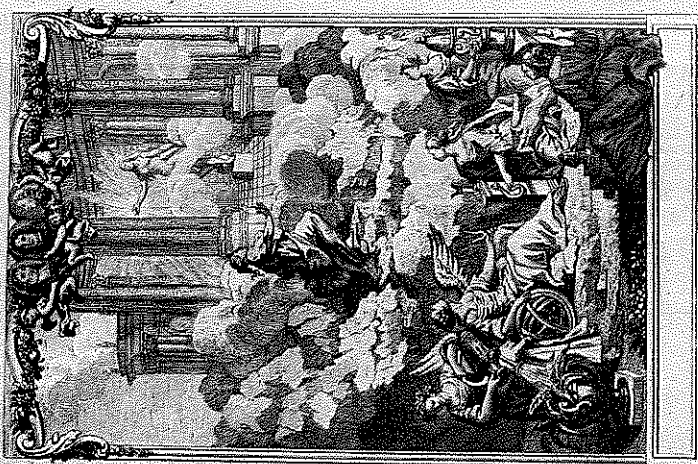


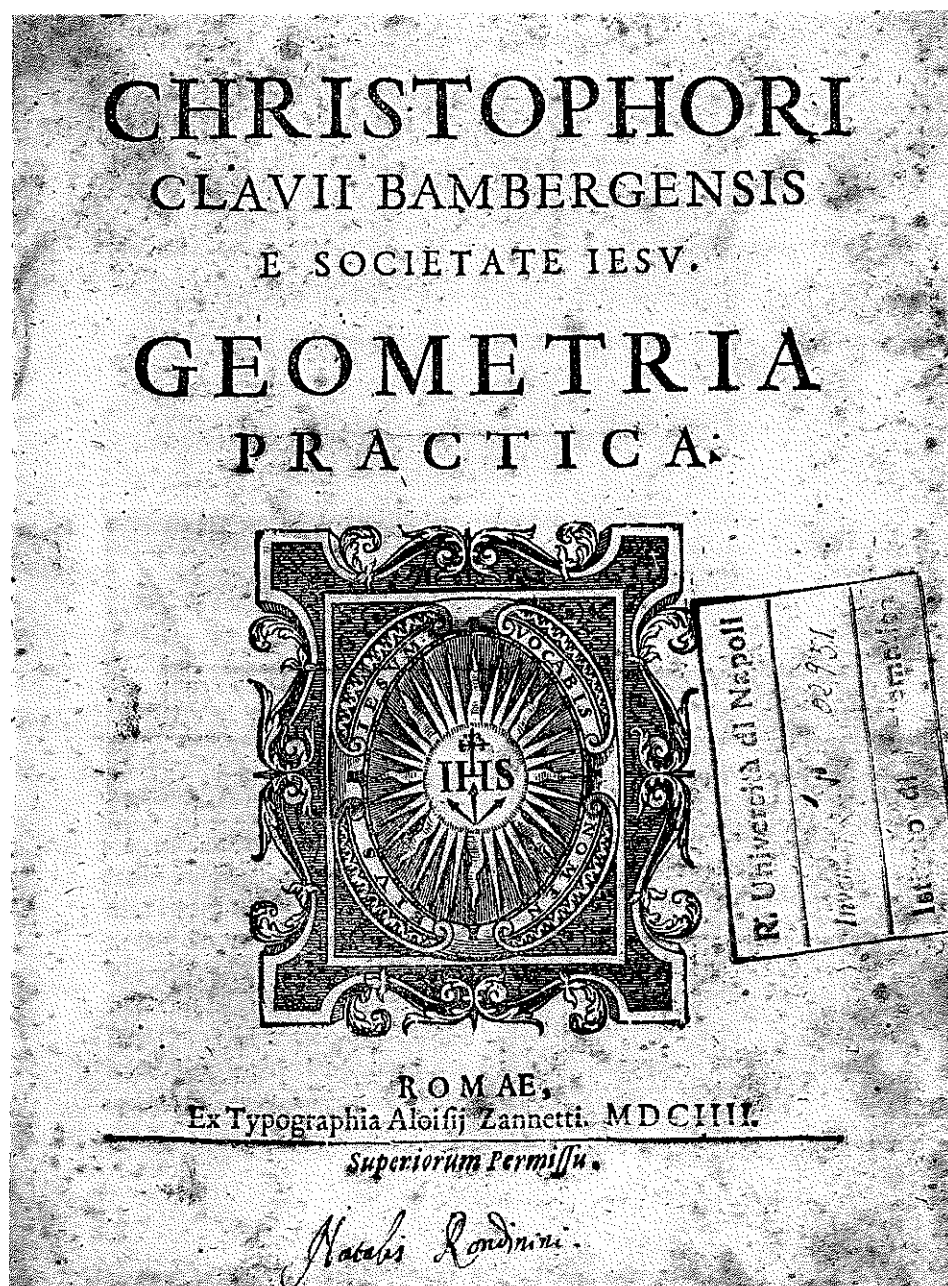
INSTITUTIONS  
D E  
PHYSIQUE.



A PARIS,  
Chez PRAULT fils, Quai de Concy, vis-à-vis la  
défense du Pont-Neuf, à la Charité.

M. D C C. X L.  
*Avec Approbation & Privilège du Roi.*





**SCIPIONIS  
CLARAMONTII  
PHILOSOPHI PROFVNDISSIMI.  
Ac Mathematici Celeberrimi  
OPVSCVLA VARIA MATHEMATICA  
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITA.**

S C I L I C E T

- |                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I. De Phasibus Lunæ, quo modo rotunda, modo dimidiata, modo aucta lumine, modo diminuta apparet.</p> <p>II. De Horizonte sensibili.</p> <p>III. De vsu Speculi pro libella, &amp; de rota libratione.</p> | <p>IV. Ex inspectione Imaginis subiecti per reflexionem ex Aqua quiescente in vase, inuestigare quanta sit diameter terræ.</p> <p>V. De Altitudine Caucafi.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**AD LEOPOLDVM MEDICEVM  
PRINCIPEM SERENISSIMVM.**



S. B. I.

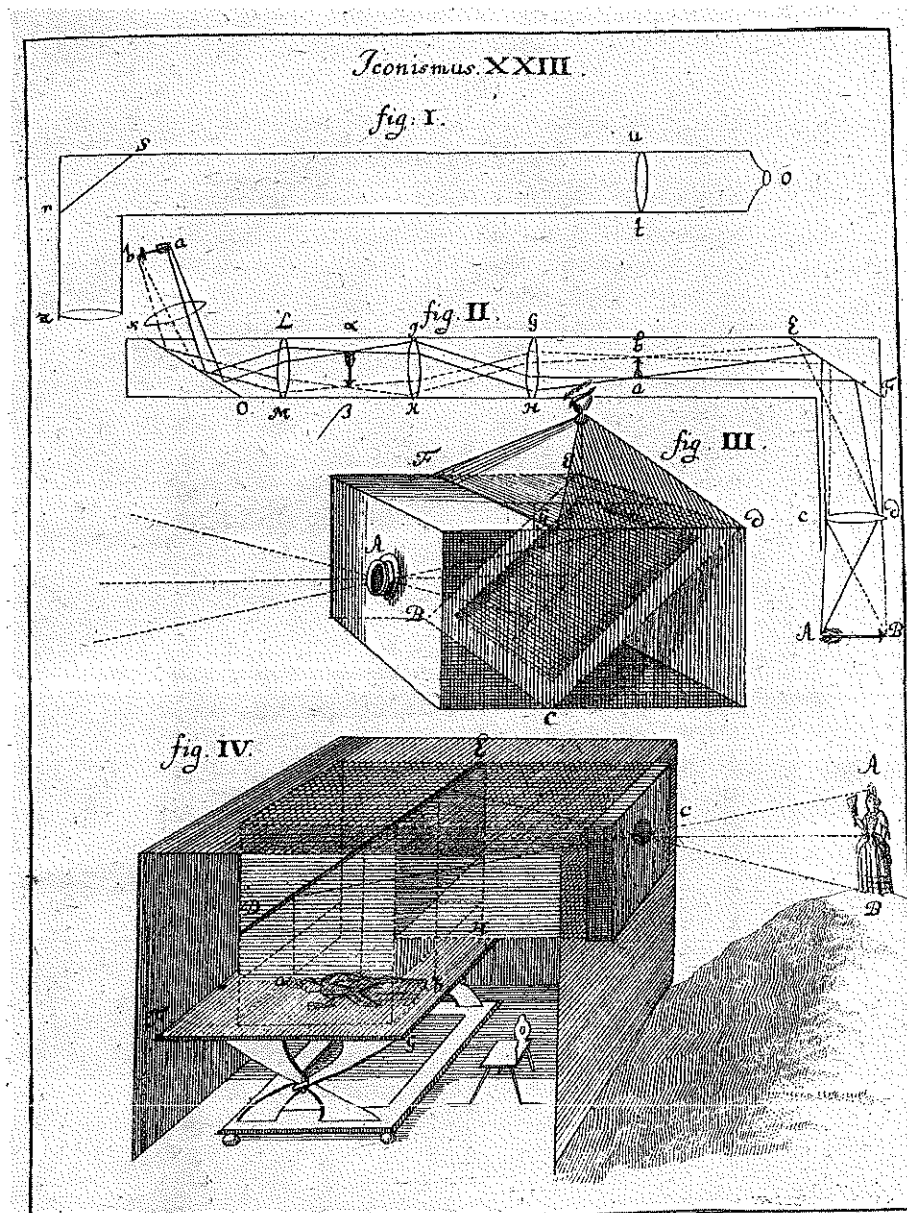
Bononiæ, Ex Typographia Caroli Zeneri. 1653. Superius unum per m. f. a.

Der dreifach geartete  
**Sehe-Strahl** /  
 In einer kurzen doch deutlichen  
 Anweisung  
 zur  
**OPTICA**  
 Oder  
**Sehe-Kunst** /  
 Von übrigen und einsamen Stunden  
 zu Erhebung göttlicher Weisheit  
 und  
 den Kunst-begierigen zur Handleitung /  
 in etwas ertvogen  
 Von  
**JOHANN MICHAEL CONRAD**,  
 t. r. Pst. Cob. Castell.  
*Cum Censura & approbatione*  
 inductae Facultatis Philologicae Jenensis.

**COBURG** /  
 In Verlegung des Autoris.  
 Cernau Druckes Joh. Fröh. Negelein / Buchschaff. Stsch. Hoff  
 und Langen-Buchdr. M D C C X.





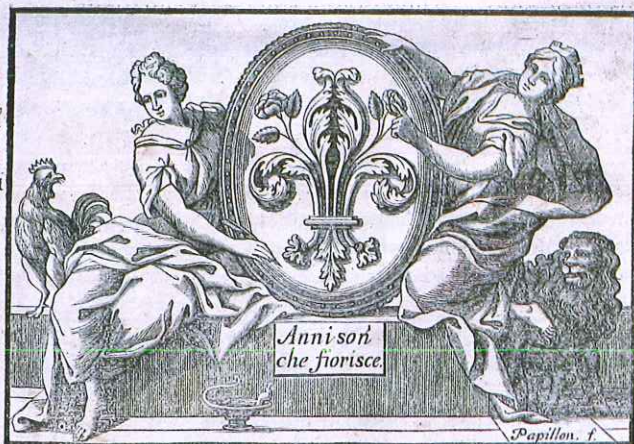




R. P. CLAUDII FRANCISCI  
MILLIET  
**DECHALES**  
CAMBERIENSIS  
E SOCIETATE JESU  
**CURSUS**  
S E U  
**MUNDUS MATHEMATICUS.**  
TOMUS PRIMUS

COMPLECTENS TRACT. DE PROGRESSU MATHESEOS ET DE  
*Illustribus Mathematicis, Euclidis Libros XIV, Theodosii spherica, Sectiones Conicas, Arithmetica,*  
*Trigonometriam, Algebram, & refutationem Hypotheson Cartesianarum.*

Editio altera ex Manuscriptis Authoris aucta & emendata, operâ & studio  
R. P. AMATI VARCIN ejusdem Societatis.



CH.  
Intus  
Carol.  
Jaurin

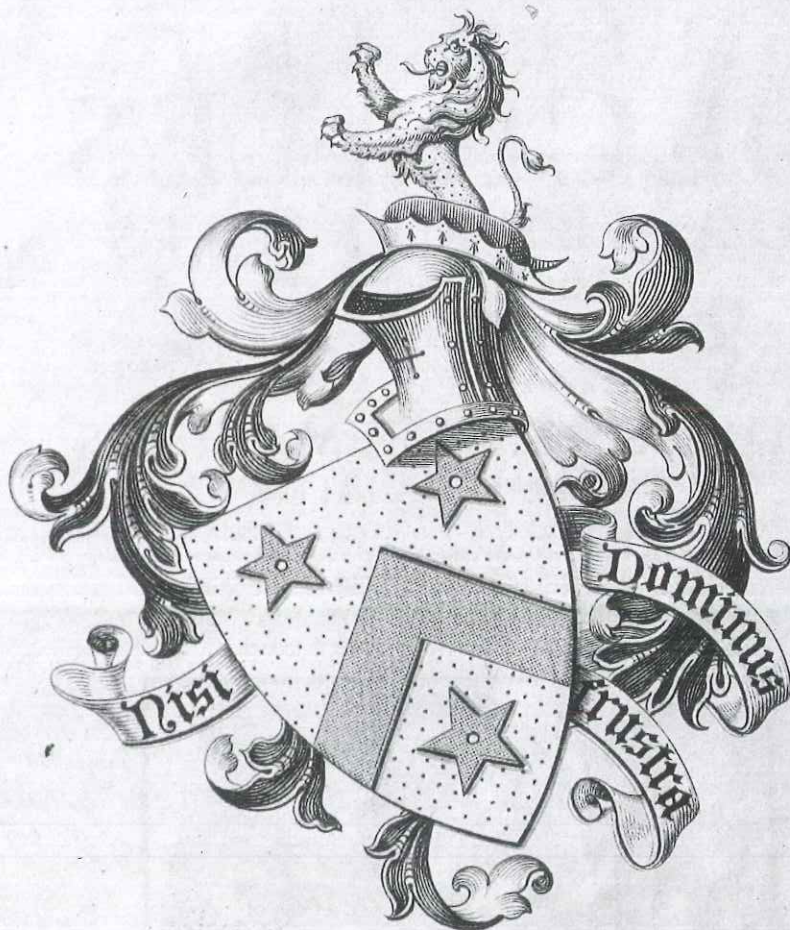
FF  
Cremetara  
Crecatator  
J. P. Auger

**LUGDUNI,**

Apud ANISSONIOS, JOAN. POSUEL & CLAUD. RIGAUD.

M. DC. LXXXX.  
CUM PRIVILEGIO REGIS.





Alexander Henry Davis.



## INDEX TRACTATUUM

Qui in toto Opere continentur.

### IN TOMO PRIMO.

TRACTATUS Proem. de Progressu Mathematicos, & de illustribus Mathematicis.

TRACT. I. Euclidis Libri XIV.

II. Theodosii sphaerica.

III. De sectionibus Conicis.

IV. Arithmetica.

V. Trigonometria.

VI. Algebra.

Hypotheseon Cartesianarum  
refutatio.

### IN TOMO SECUNDO.

VII. Geometria practica.

VIII. Mechanices.

IX. Statica.

X. Geographia.

XI. De Magnete.

XII. Architectonica civilis.

XIII. Ars tignaria.

XIV. De lapidum sectione.

### IN TOMO TERTIO.

XV. Architectura militaris.

XVI. Hydrostatica.

XVII. De Fontibus & Fluvii.

XVIII. De machinis Hydraulicis.

XIX. De Navigatione.

XX. Optica.

XXI. Perspectiva.

XXII. Catoptrica.

XXIII. Dioptrica.

### IN TOMO QUARTO.

XXIV. Musica.

XXV. Pyrotechnia.

XXVI. Astrolabium.

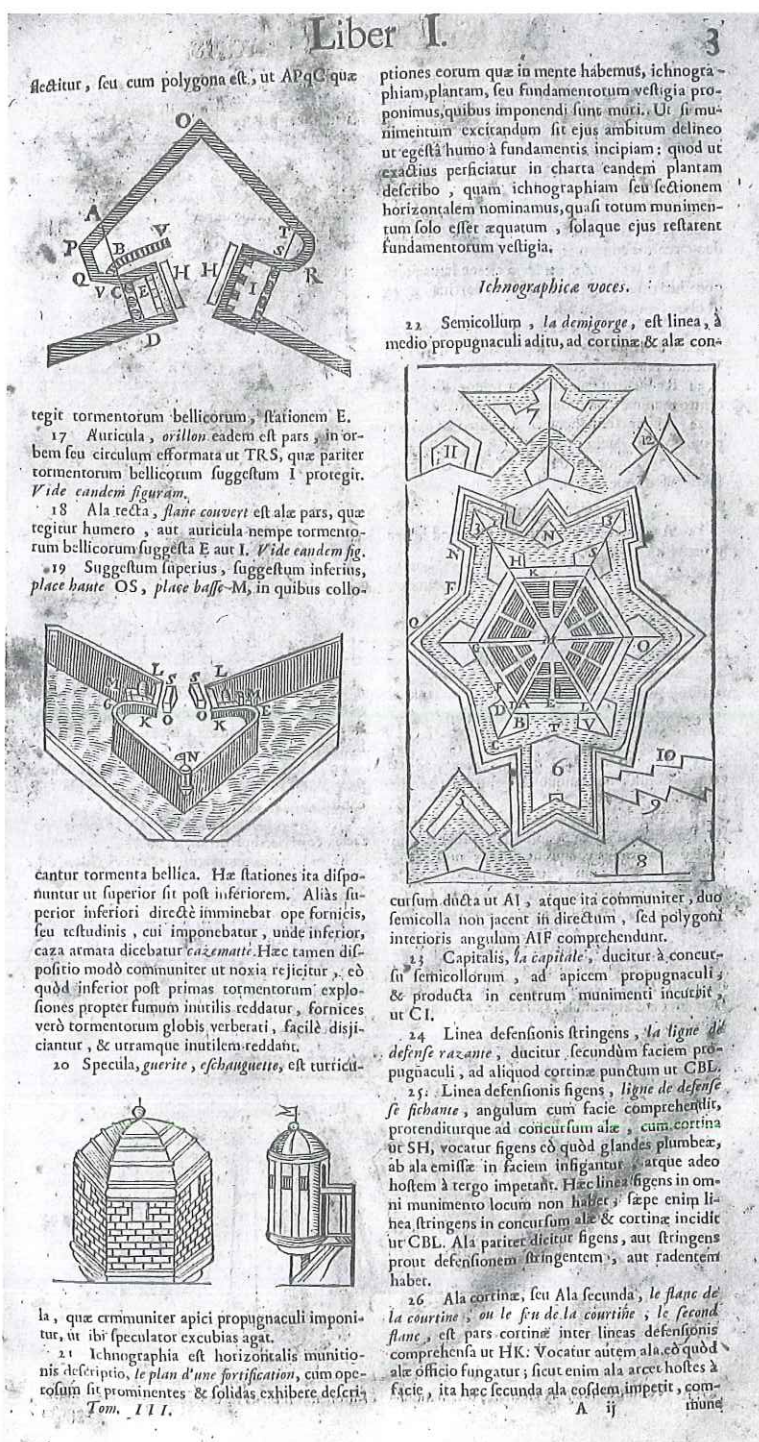
XXVII. Gnomonica.

XXVIII. Astronomia.

XXIX. Astrologia.

XXX. Appendix ad Astronomiam,  
scu Tract. de Meteoris.

XXXI. Kalendarium.



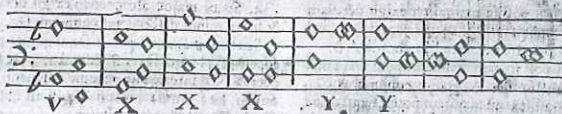
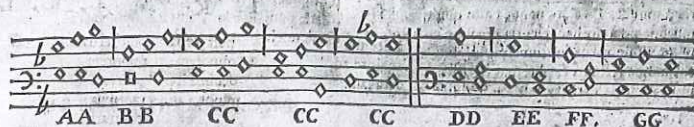


## Musica

37

## PROPOSITIO XXX.

De contrapuncto.



Contrapunctum nihil est aliud nisi ipsa compositio; hoc nomine vocata quia antiquitus, loco notarum musicarum, puncta punctis respondabant.

Dividitur autem in simplex & figuratum. Simplex illud est, in quo notae sibi invicem correspondent, sunt aequalis valoris, quo ad durationem, immo non est magna in notis diversitas, ut accidit plerumque in cantu Ecclesiastico.

Contrapunctum figuratum, seu floridum illud est in quo major est notarum diversitas. Crebrioresque sunt minores illarum notas quas unicas vocamus, aut semiluncas. Nec differt à Musica nostra communi, possunt autem illius esse plures species, nempe species illa quam aërem dicimus, vel Musica laeta; vel denique Musica pia, & rebus sacris aptissima. Musica autem doctior illa est in qua etiam dissonantiae miscentur aliquando consonantiis, in qua possunt aliquae observari regulae.

1. Omnes falsae relationes cum basso vitari debent, non tamen partium inter se, esset enim nimis operosum.

2. Syncope mirabilis est, habetque effectus mirabiles; nam illius ope, miscentur consonantiae dissonantiis.

3. Punctum non patitur syncopen,

4. Quarta excusari potest, vel per tertiam, vel per quintam vel per sextam.

5. Quinta, & octava requirunt, ferè semper tertiam, & nonnunquam quinta pro sexta ponitur.

6. A sexta majori non fit transitus ad tertiam majorem, sed ad minorem.

7. Post falsam quintam, sequatur tertia majoris post falsam quartam sexta minor.

8. Partes in musica ita vicinæ esse debent, ut nulla possit admitti inter illas consonantia.

9. Tres relationes, non harmonice vitandae sunt. Nempe tritoni, diapente falsi, superflua octava, & octava deficientis, septimam & nonam progressus.

Fatendum tamen est has regulas non esse ita strictas, ut etiam si, non obviarentur possit aliquis musicus reprehendi; praecipue si reliqua belle procedunt.

Fugam vocamus quoties partes idem non cantunt, sed se invicem sequuntur una, aut altera mensura.

Fugae sunt aliae simplices, aliae duplices, aliae invertae.

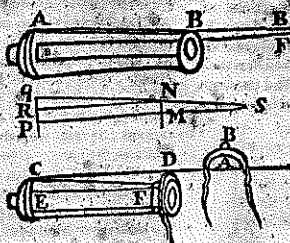
Fuga simplex illa est in qua partes idem concinunt, non simul, sed una post aliam. Ut si una canat ut, re, mi, fa, sol, alia pars postea idem dicat.

Fuga duplex erit, si una pars dicat ut fa, sol, la, alia dicat la, fa, sol ut, &c. Unde vix potui bene discernere inter fugam duplicem & inversam. Vitandae autem sunt falsae relationes, falsi transitus, ab una consonantia ad aliam.

E ii] PROPO

## Liber II

79



puteatur tormentum dirigat ad scopum, cum tamen ab eo longius aberit.

Sic enim linea metalli AB, quæ interioris producat in CD, sit & linea animæ EF; hæc duæ lineæ concurrent. Ponamus concurrere in C. Si scopus fuerit in C, nempe in ea distantia in qua concurrunt hæc lineæ, collimando secundum lineam metalli AB, machina tamen bene erit disposita ad attingendum scopum, si vero scopus fuerit in B, hoc est in minori distantia quam sit concursus linearum collimando per AB, globus infra scopum cadet.

Si vero fuerit scopus ultra punctum concursus, ut in puncto D, globus supra scopum cadet, nempe in G.

In qua autem distantia sit iste concursus, pendet ex inæqualitate crassitie, quæ cum in diversis machinis varia sit, variam etiam inducit distantiam. Ut autem habeatur ista operare, neque aliqua virga intervallum BO, compositum ex crassitie, & diametro orificii; cum per lumen I, filo ferreo metire pariter crassiem, simul cum diametro animæ; subduc ab utraque diametrum vacui, restabit utraque crassities. Ponamus illas esse æquales lineis MN, PQ, sit QR, excessus majoris crassitie supra minorem. Fiat ut excessus QR, ad RN longitudo machinæ, ita crassities MN ad lineam MS, distantiam, ad quam concurrunt lineæ metalli, cum lineæ animæ.

Demonstratio. Triangula QRN, MNS, sunt æquiangula ut patet, cum lineæ PQ, MN, RN, PS, supponantur parallele; quare (per 1. 6. Eucl.) ita erit QR ad RN, sicut MN ad MS. Quod erat demonstrandum.

Accidit autem sæpe ut licet dirigatur tormentum secundum lineam visuale ad scopum, ad distantiam quingentorum passuum illum attingat præcisè; ex quo nonnulli voluerunt concludere, tantum esse jactum machinæ, per lineam rectam, cum tamen non perveniret ad scopum per lineam omnino rectam, sed tantisper inflexam, & curvam. Nam ut dixi in distantia superante concursum linearum, dum collimamus secundum lineam metalli, accollimus machinam supra scopum; ergo si in tali situ attingitur scopus, debuit globus jam nonnihil descendisse. Unde sæpe jactus per lineam rectam creditur major, quam re vera sit. Quod dixi de tormento bellico de minoribus, seu mosquetis intelligendum est.

Ut autem dirigatur anima tormenti bellicæ, recta ad scopum, collimandum est per lineam parallelam animæ; quod ut facilius fiat, additur aliquid orificio tormenti, ut augeatur ejus crassities, & æqualis evadat crassities eandem. Non-

nullum frustum candele apponunt; alii vero apertè excavant lignum aliquod AB, secundum convexitatem tormenti, illudque angustius rotondum. Vellem autem ut melius omnia succederent, in superiori parte efformare globulum aliquem visibilem, qui ita aptaretur, ut responderet perpendiculariter notæ factæ in machina, secundum praxin præcedentis propositionis. Quamvis enim notæ non essent horizontaliter dispositæ, atque adeo notæ prius inusta non invenirentur in plano verticali; modo hoc instrumentum ita disponatur, ut globus B in eodem sit plano cum puncto prius notato in orificio machinæ, idque erit rectius; alioquin singulis vicibus utendum esset perpendiculo, ad inventiendâ puncta altiora, tam in ore quam in cauda.

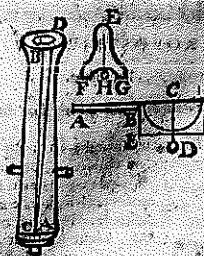
Manifestum est ex hac praxi, cum fiat collimatio per lineam parallelam, semper alius collimandum supra scopum, quanta est distantia illius lineæ CD ab axe EF.

## PROPOSITIO XVI.

## Theorema.

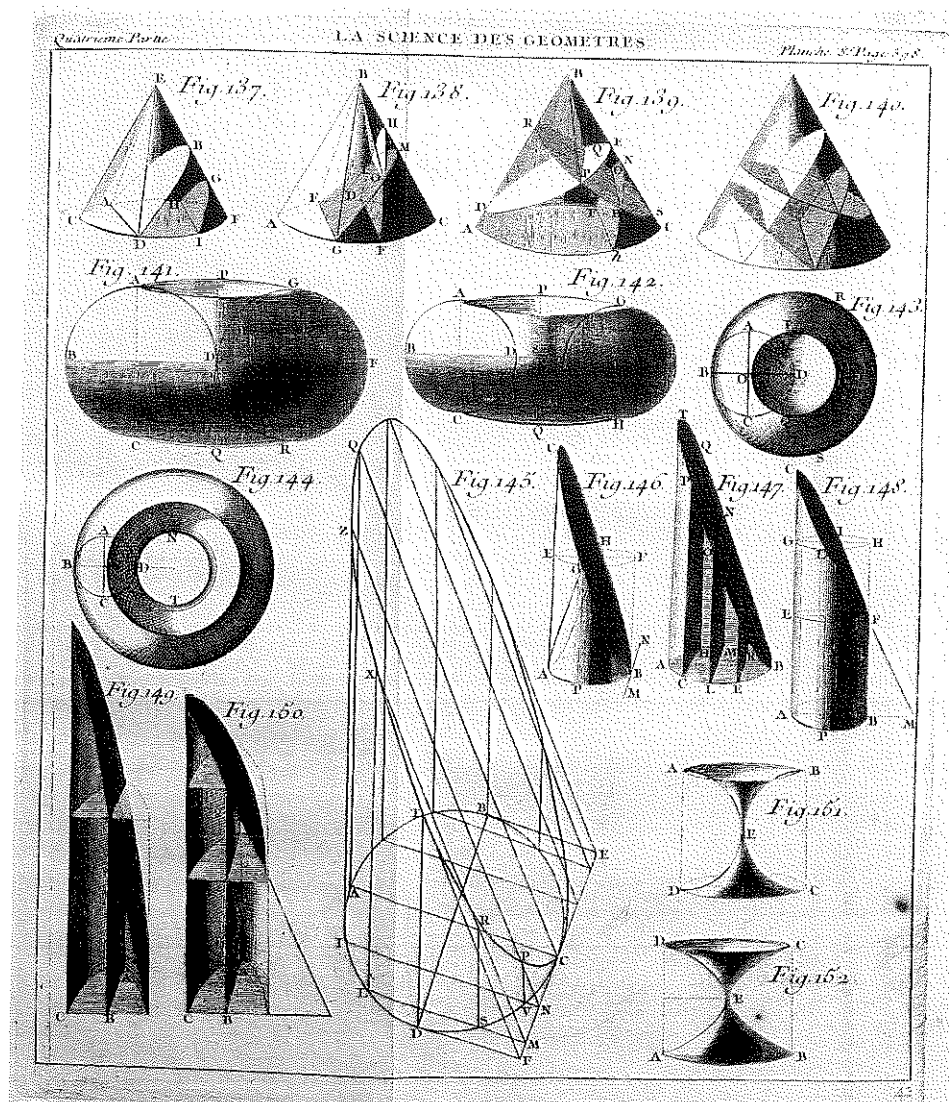
Cur nonnunquam deflebat globus ad dexteram, nonnunquam ad levam.

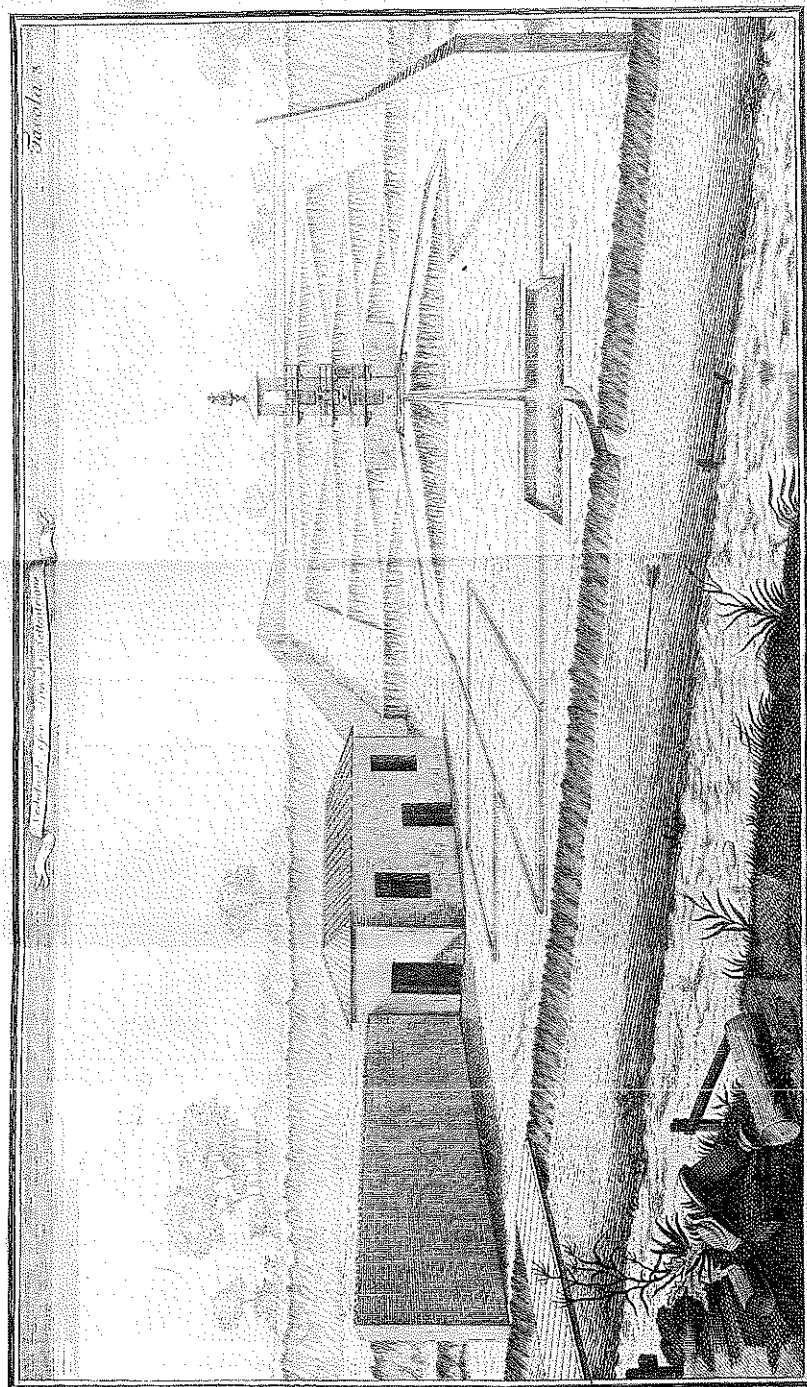
Sæpe accidit ut dum exploduntur tormenta bellica, ad levam aut ad dextram defleat globus, & à scopo aberit. Quæritur igitur unde id accidat. Plurimi enim errorem animæ, seu vacuo machinæ tubi, & obliquitatem aliquam sus-

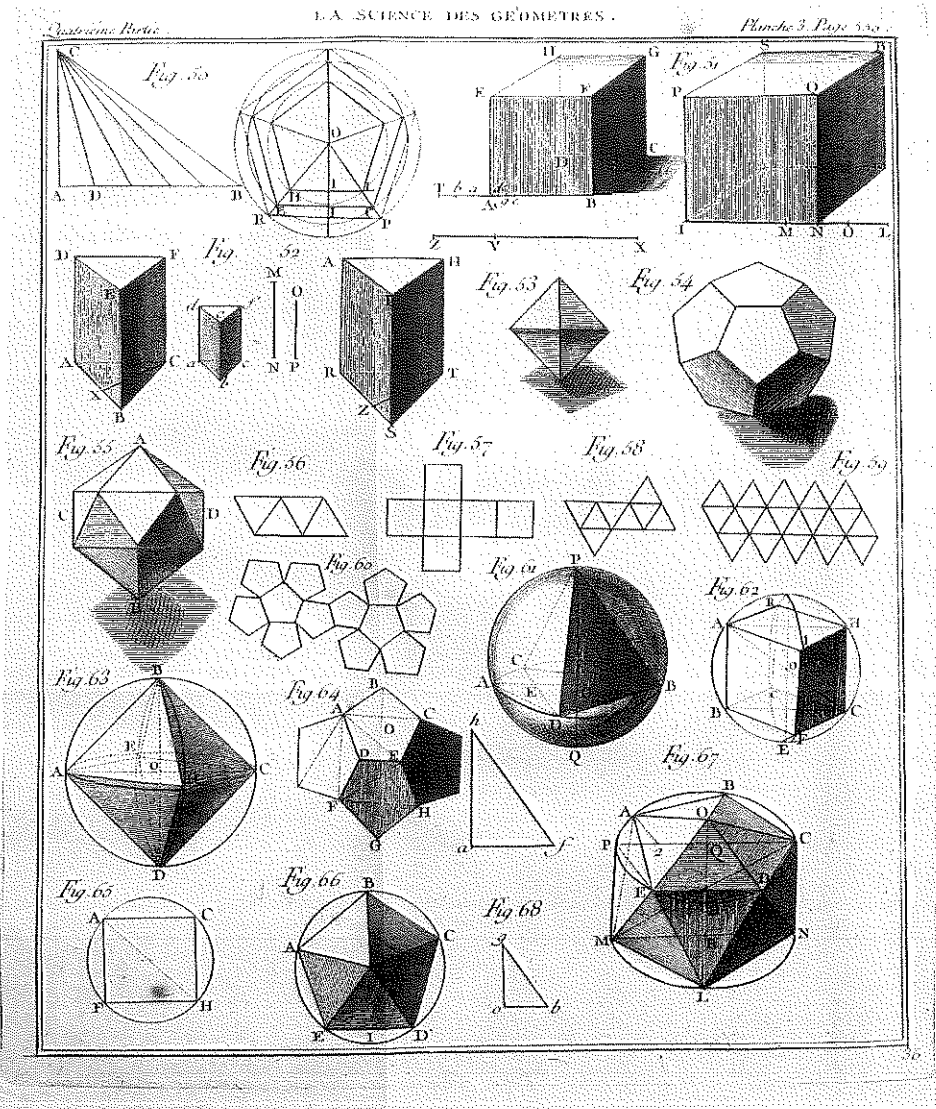


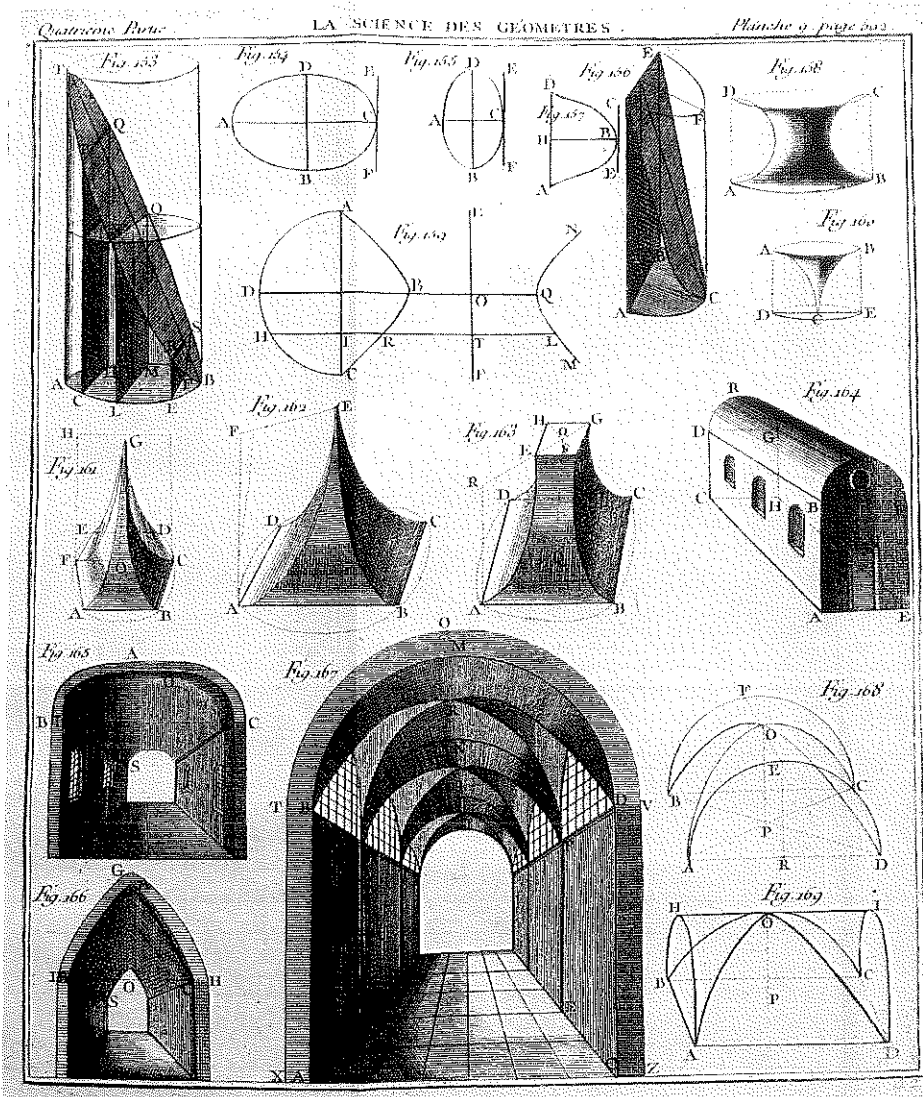
pleantur. Alii cantherium, seu compagem lineam accusant, quod in ea non observetur æquilibrum, vel denique culpat in soli inæquali-

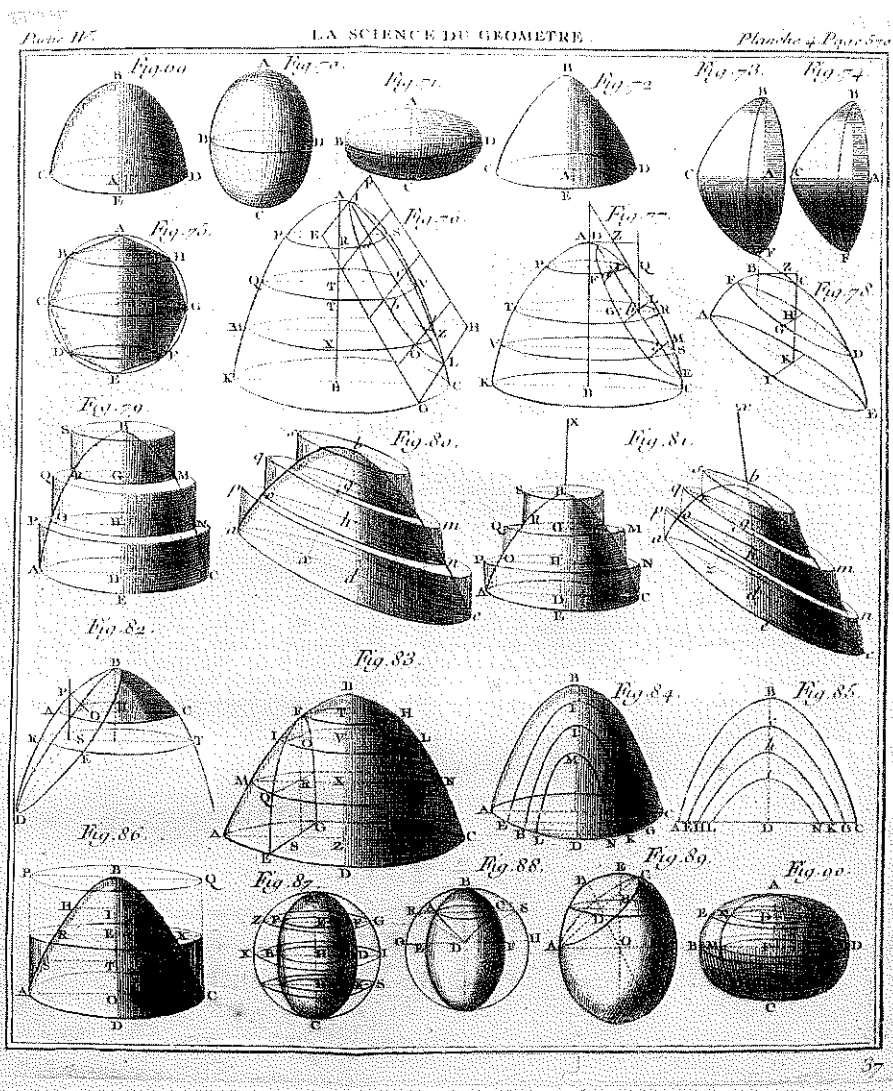


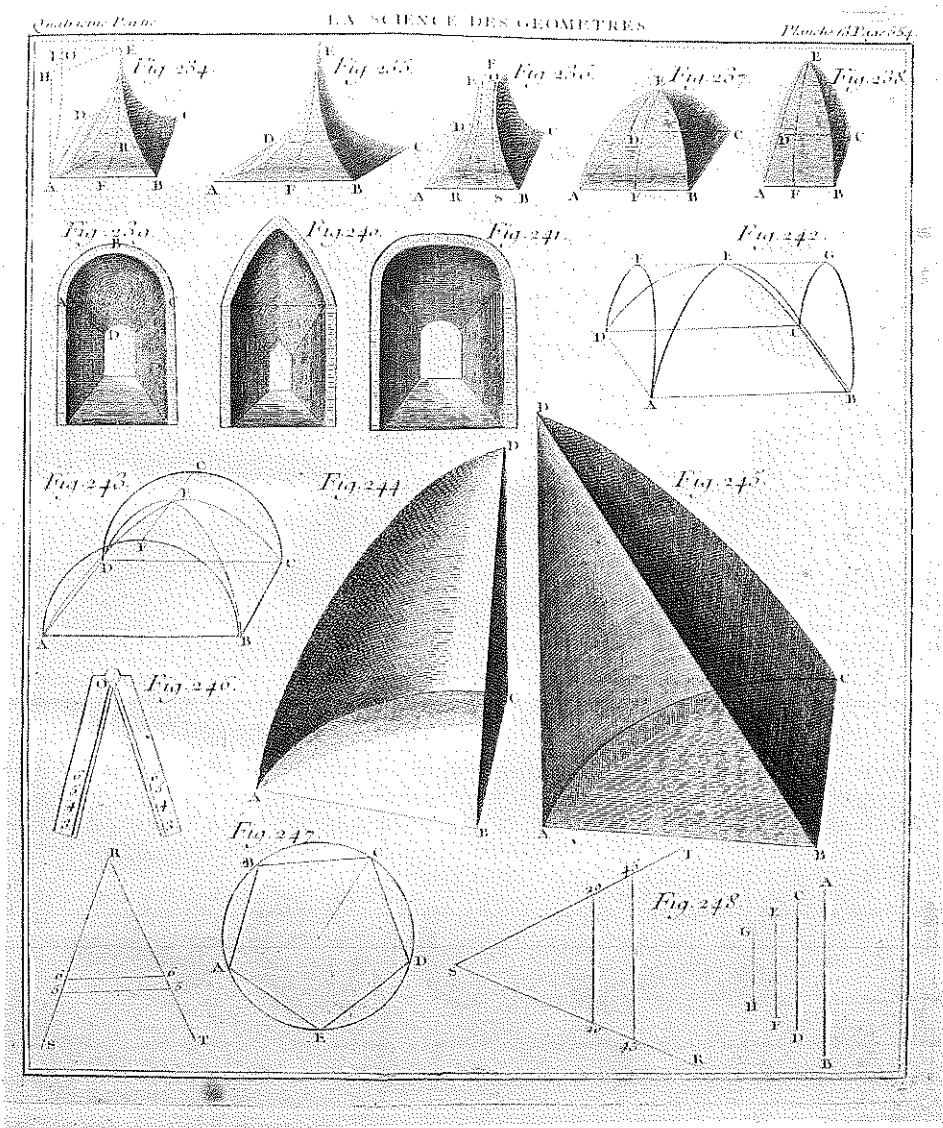


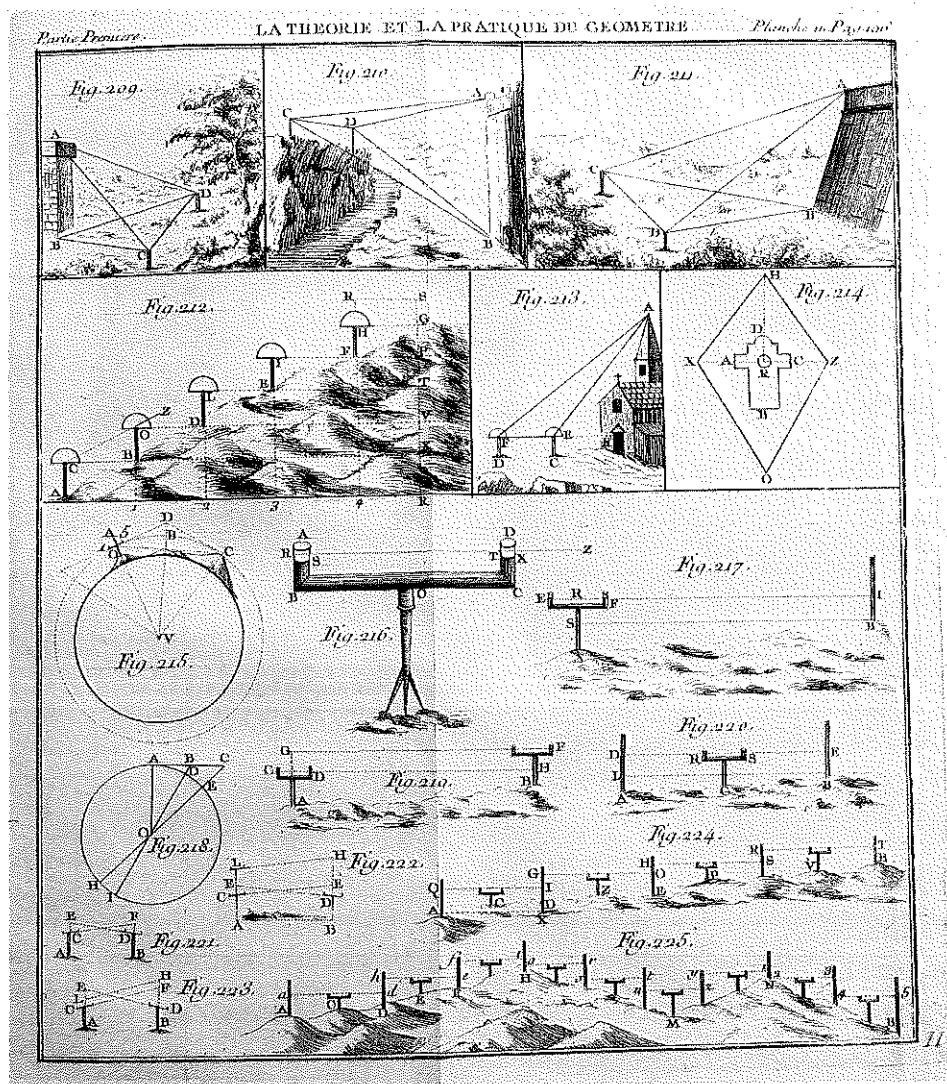




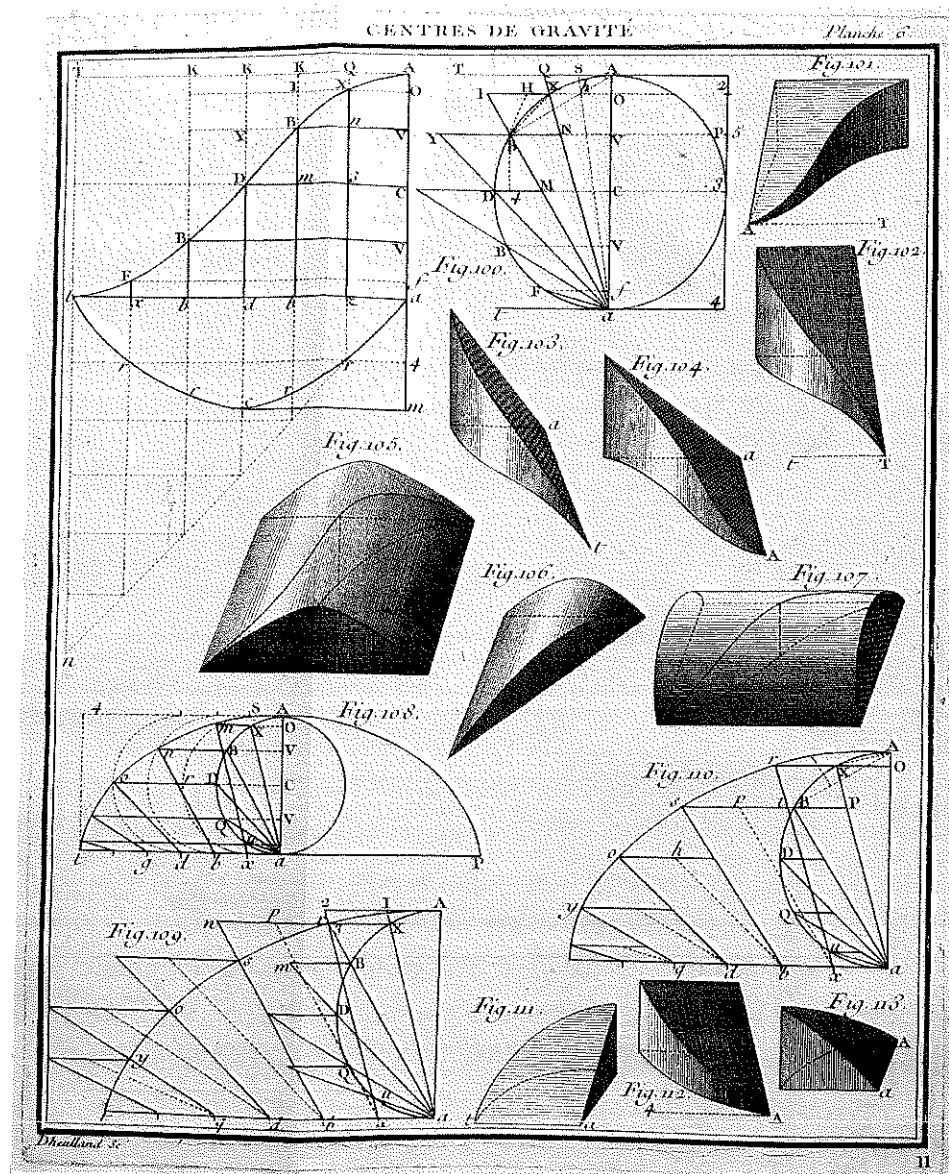














## CENTRES DE GRAVITE

Planche 11

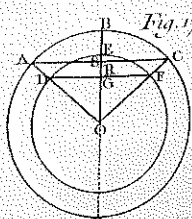


Fig. 170.

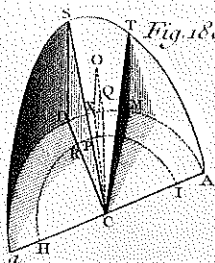


Fig. 180.

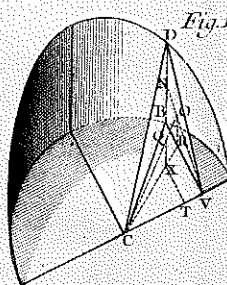


Fig. 181.

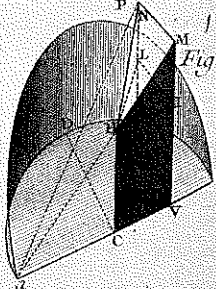


Fig. 182.

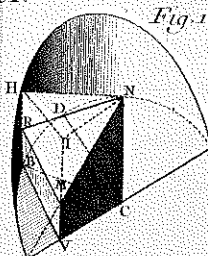


Fig. 183.

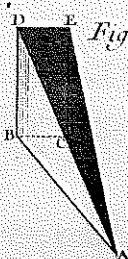


Fig. 184.



Fig. 185.

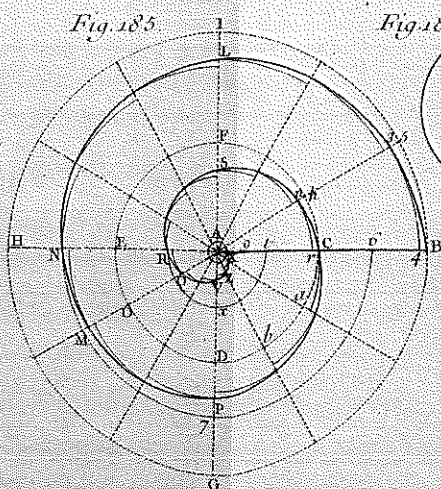


Fig. 186.

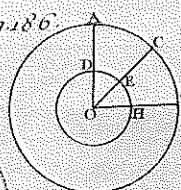


Fig. 187.

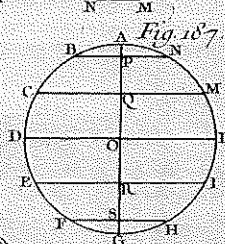
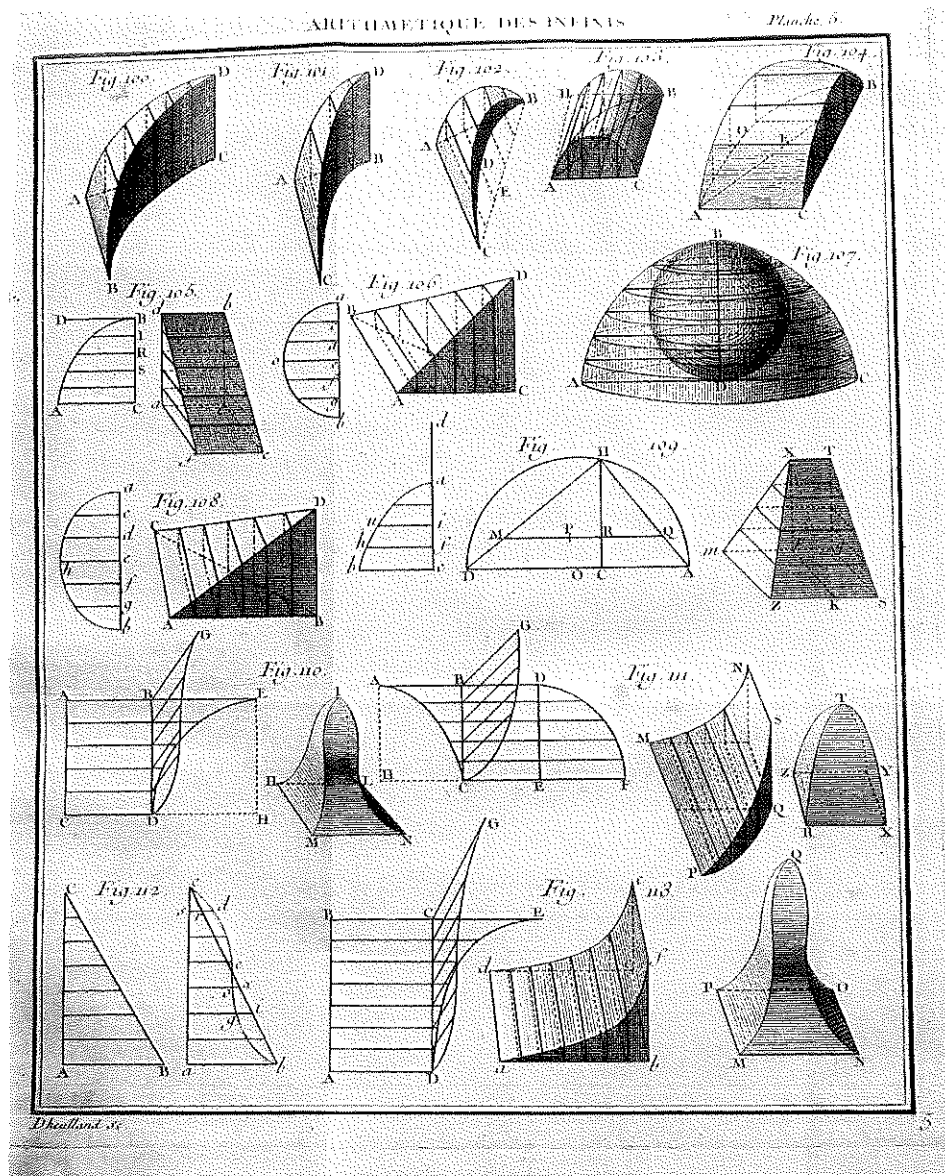
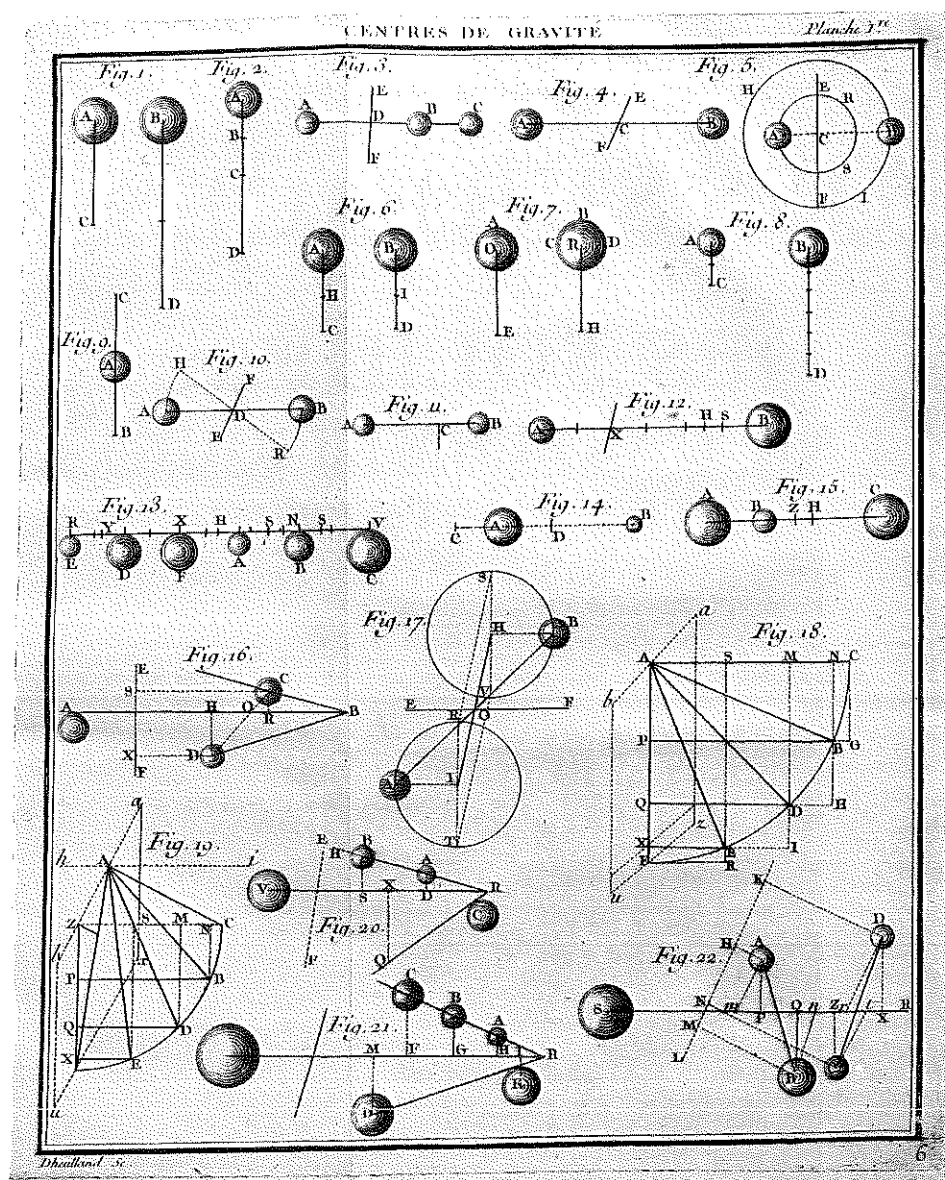


Fig. 188.





# LA MESURE DES SURFACES

ET

## DES SOLIDES, PAR L'ARITHMETIQUE DES INFINIS

ET LES CENTRES DE GRAVITÉ

*Par M. l'Abbé DEIDIER.*



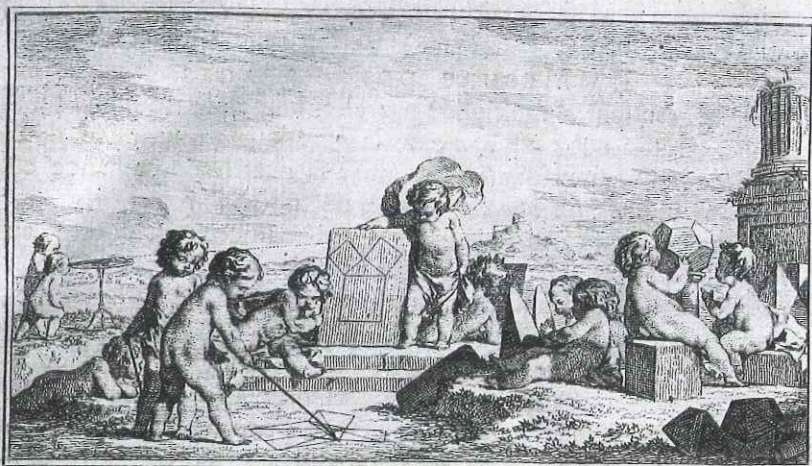
A PARIS, RUE SAINT JACQUES;

Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie  
& pour le Génie, à l'Image Notre-Dame.

---

M. D.C.C. XL.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



LA MESURE  
DES SURFACES  
ET  
DES SOLIDES,  
PAR L'ARITHMETIQUE  
DES INFINIS,  
ET LES CENTRES DE GRAVITE.

\*\*\*\*\*

LIVRE PREMIER.

Où l'on applique aux Surfaces & aux Solides les Principes  
de l'Arithmétique des Infinis.

CHAPITRE PREMIER.

*Définitions & Principes.*

DEFINITION PREMIERE.

1°. **Q**N appelle *Puissances* d'une grandeur, les diffé-  
rens degrés auxquels cette grandeur s'élève en  
se multipliant elle-même successivement une  
fois, deux fois, trois fois, &c.... Soit, par  
exemple une grandeur que nous appellons  $a$ ,  
sa première puissance est  $a$ , ou la grandeur  
elle-même; sa seconde puissance ou son carré est  $aa$ , c'est-à-

A



# EVCLIDE MEGARENSE<sup>1</sup>

ACVTISSIMO PHILOSOPHO

SOLO INTRODVTTORE DELLE

SCIENTIE MATHEMATICÆ.

*DILIGENTEMENTE RASSETTATO,*

*et alla integrità ridotto, per il degno professore di tal  
Scienze Nicolò Tartalea Brisciano.*

SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.

CON VNA AMPLA ESPOSITIONE DELL'ISTESSO  
traduttore di nuouo aggiunta, talmente chiara, che ogni mediocre  
ingegno, senza la notitia, ouer suffragio di alcun'altra scientia  
con facilità serà capace a poterlo intendere.

Di nuouo con ogni diligenza ben corretto, e ristampato.

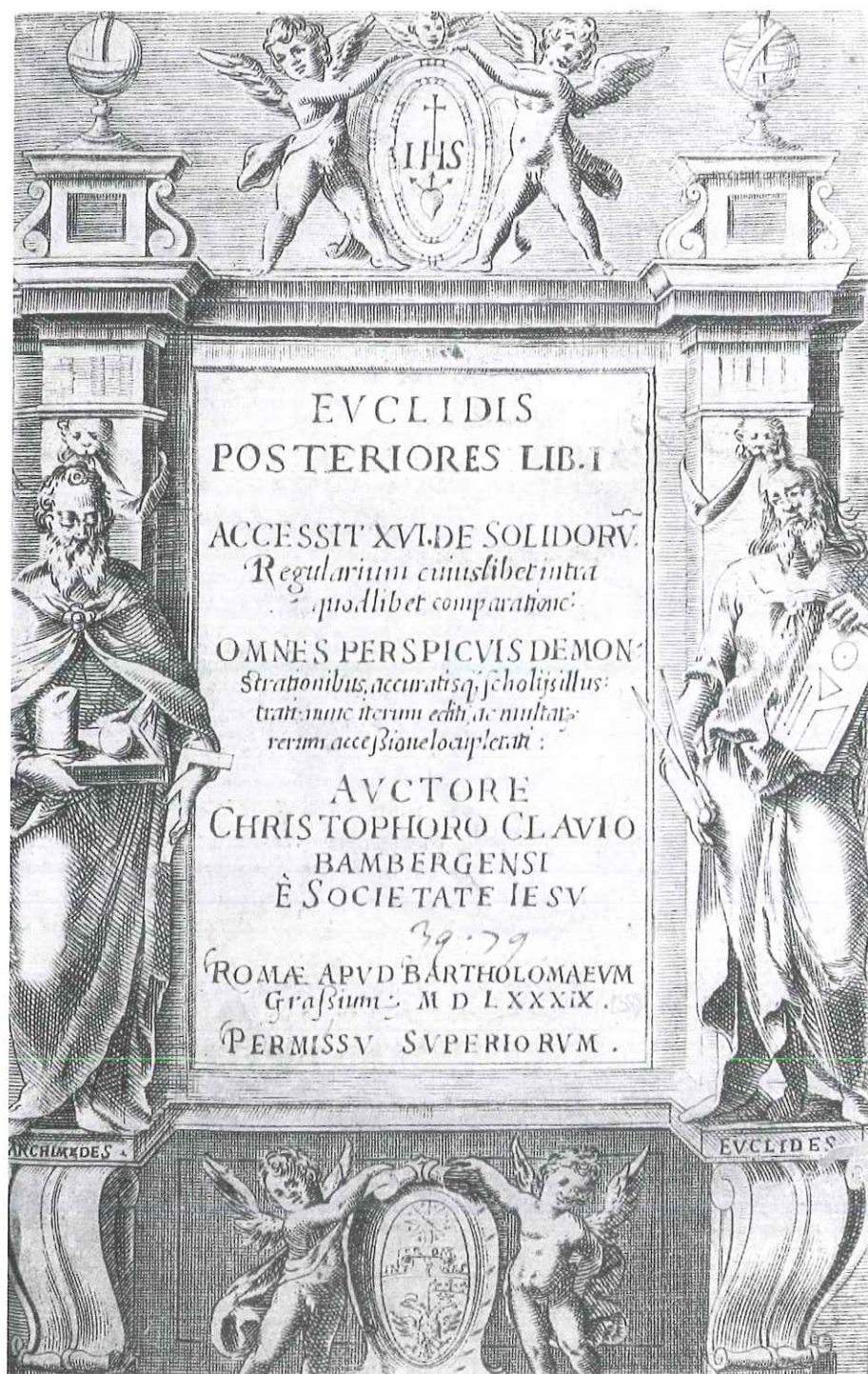


IN VENETIA,

Appresso gli Heredi di Troian Nauo, alla Libreria dal Leone.

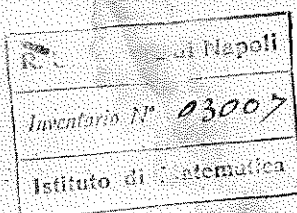
M D LXXV.

*Luomo d'oro Agnino e suo pubblico*

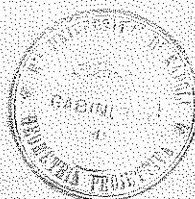




PAULLI FRISII  
 OPERUM  
 TOMUS PRIMUS  
 ALGEBRAM  
 ET GEOMETRIAM ANALYTICAM  
 CONTINENS.



*Ino. 546*

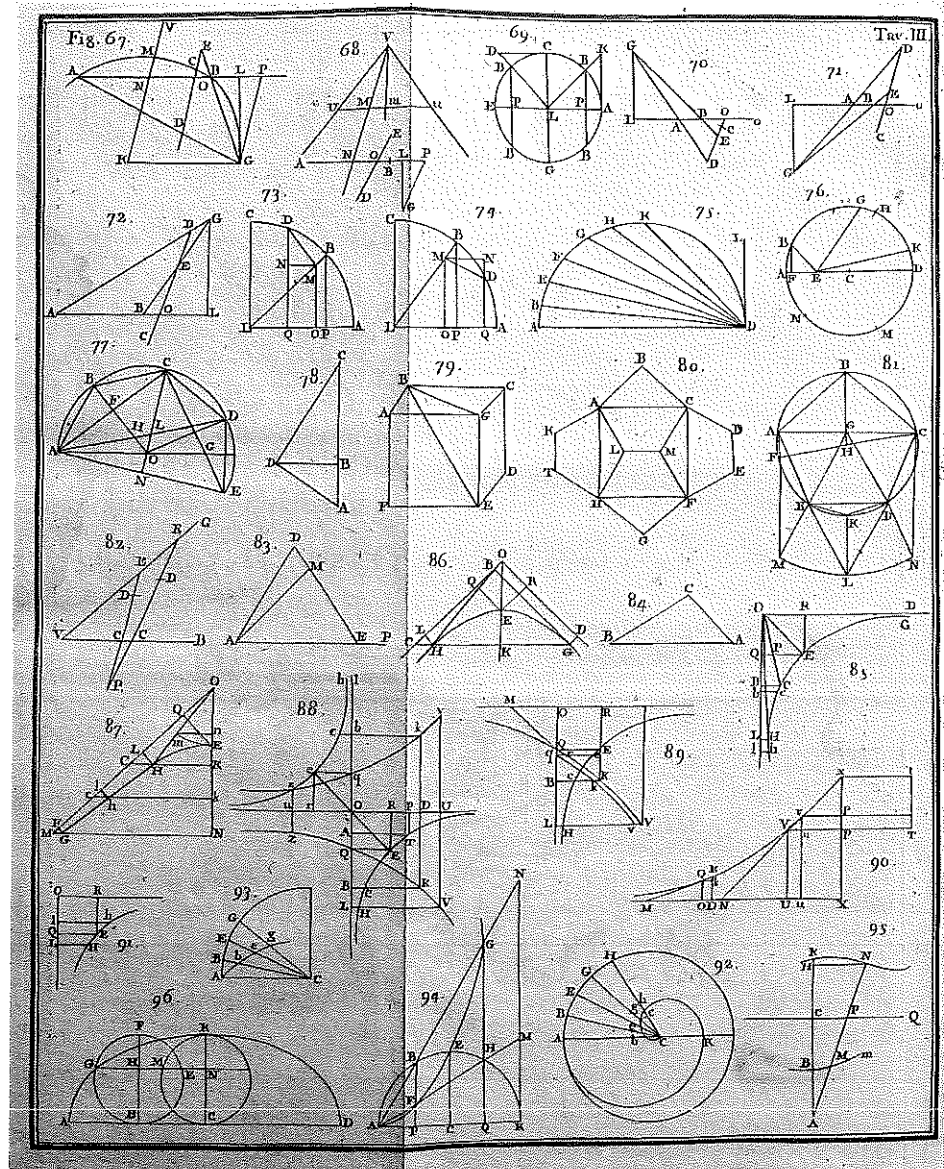


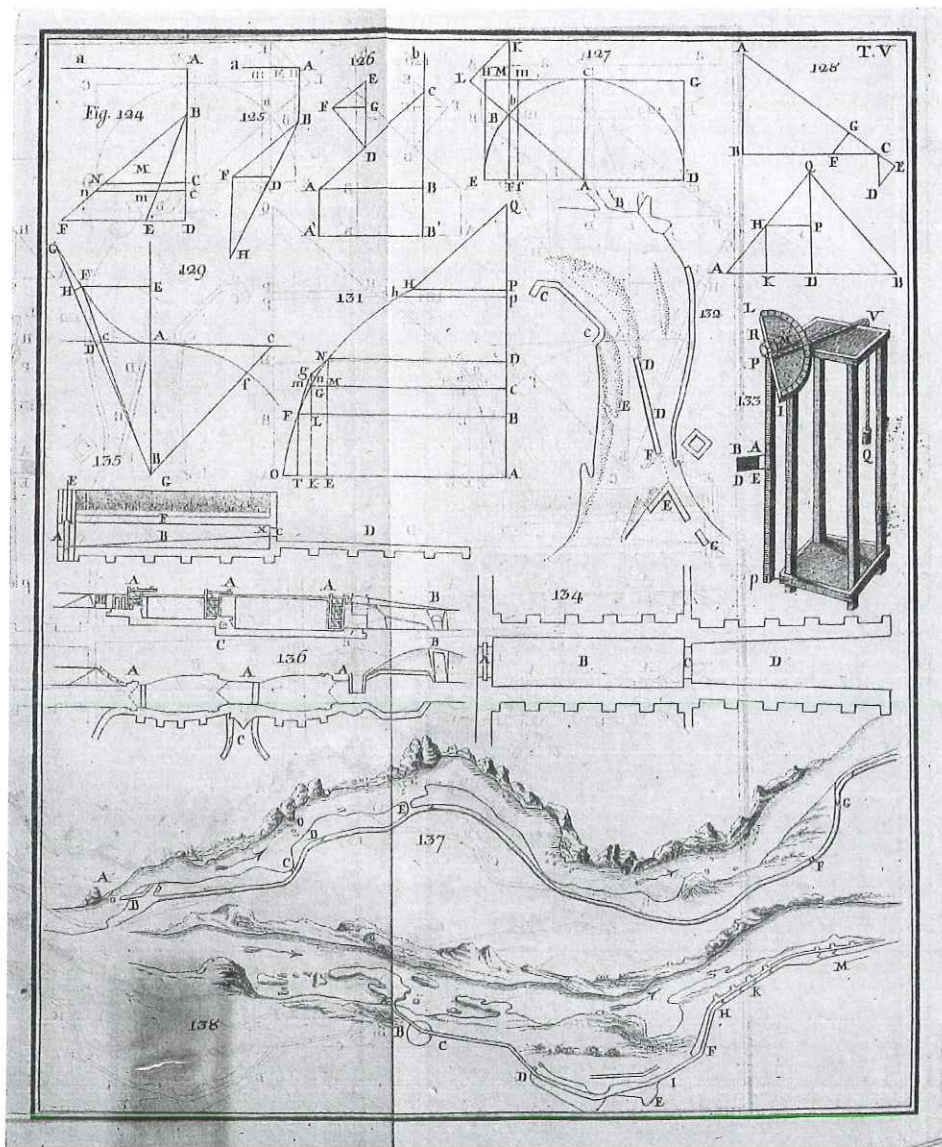
MEDIOLANI. MDCCCLXXXII.

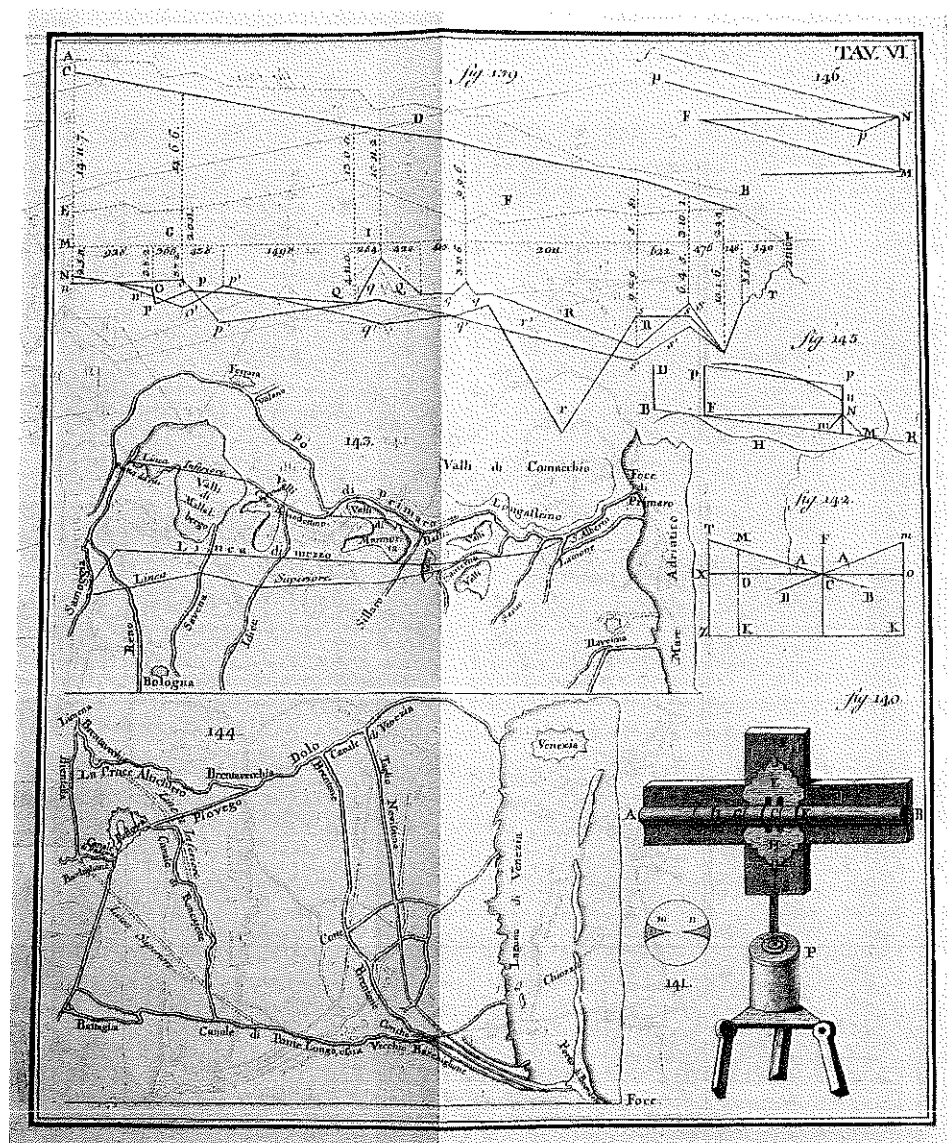
APUD JOSEPH GALEATIUM REGIUM TYPOGRAPHUM.

*Superiorum approbatione.*











44 Deg.

| I   | // | Sinus.    | Dif. | Co-Sinus. | Dif. | Tang.     | Dif. | Co-Tang.   | // | I  |
|-----|----|-----------|------|-----------|------|-----------|------|------------|----|----|
| 40  |    | 9.8469436 |      | 9.8519972 |      | 9.9949466 |      | 10.0050534 |    | 40 |
| 100 |    | 9.8469640 | 113  | 9.8519768 | 108  | 9.9949888 | 421  | 10.0050112 | 50 |    |
| 200 |    | 9.8469860 | 113  | 9.8519554 | 109  | 9.9950309 | 421  | 10.0049691 | 40 |    |
| 300 |    | 9.8470070 | 113  | 9.8519345 | 109  | 9.9950730 | 421  | 10.0049270 | 30 |    |
| 400 |    | 9.8470280 | 112  | 9.8519137 | 108  | 9.9951151 | 421  | 10.0048849 | 20 |    |
| 500 |    | 9.8470501 | 113  | 9.8518929 | 109  | 9.9951572 | 421  | 10.0048428 | 10 |    |
| 600 |    | 9.8470714 | 113  | 9.8518721 | 109  | 9.9951993 | 421  | 10.0048007 | 0  |    |
| 41  |    | 9.8470927 | 113  | 9.8518513 | 108  | 9.9952414 | 421  | 10.0047586 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8471140 | 113  | 9.8518304 | 109  | 9.9952835 | 421  | 10.0047165 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8471353 | 113  | 9.8518096 | 109  | 9.9953257 | 421  | 10.0046743 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8471566 | 112  | 9.8517888 | 108  | 9.9953678 | 421  | 10.0046322 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8471778 | 113  | 9.8517679 | 109  | 9.9954099 | 421  | 10.0045901 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8471991 | 113  | 9.8517471 | 109  | 9.9954520 | 421  | 10.0045480 | 0  |    |
| 42  |    | 9.8472204 | 112  | 9.8517263 | 108  | 9.9954941 | 421  | 10.0045059 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8472416 | 113  | 9.8517054 | 109  | 9.9955362 | 421  | 10.0044638 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8472629 | 113  | 9.8516846 | 109  | 9.9955783 | 421  | 10.0044217 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8472842 | 112  | 9.8516637 | 108  | 9.9956204 | 421  | 10.0043796 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8473055 | 113  | 9.8516429 | 109  | 9.9956625 | 421  | 10.0043375 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8473267 | 113  | 9.8516221 | 109  | 9.9957046 | 421  | 10.0042954 | 0  |    |
| 43  |    | 9.8473480 | 113  | 9.8516012 | 108  | 9.9957467 | 421  | 10.0042533 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8473692 | 113  | 9.8515803 | 109  | 9.9957888 | 421  | 10.0042111 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8473905 | 113  | 9.8515595 | 109  | 9.9958309 | 421  | 10.0041690 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8474118 | 112  | 9.8515386 | 108  | 9.9958730 | 421  | 10.0041269 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8474330 | 113  | 9.8515178 | 109  | 9.9959151 | 421  | 10.0040848 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8474543 | 113  | 9.8514969 | 109  | 9.9959572 | 421  | 10.0040427 | 0  |    |
| 44  |    | 9.8474755 | 112  | 9.8514761 | 108  | 9.9959993 | 421  | 10.0040005 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8474968 | 113  | 9.8514552 | 109  | 9.9960414 | 421  | 10.0039584 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8475180 | 113  | 9.8514343 | 109  | 9.9960835 | 421  | 10.0039163 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8475393 | 112  | 9.8514135 | 108  | 9.9961256 | 421  | 10.0038742 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8475605 | 113  | 9.8513926 | 109  | 9.9961677 | 421  | 10.0038321 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8475818 | 113  | 9.8513717 | 109  | 9.9962098 | 421  | 10.0037900 | 0  |    |
| 45  |    | 9.8476030 | 112  | 9.8513509 | 108  | 9.9962519 | 421  | 10.0037479 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8476242 | 113  | 9.8513300 | 109  | 9.9962940 | 421  | 10.0037058 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8476455 | 113  | 9.8513091 | 109  | 9.9963361 | 421  | 10.0036637 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8476667 | 112  | 9.8512882 | 108  | 9.9963782 | 421  | 10.0036216 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8476879 | 113  | 9.8512673 | 109  | 9.9964203 | 421  | 10.0035795 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8477091 | 113  | 9.8512465 | 109  | 9.9964624 | 421  | 10.0035374 | 0  |    |
| 46  |    | 9.8477304 | 112  | 9.8512256 | 108  | 9.9965045 | 421  | 10.0034953 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8477516 | 113  | 9.8512047 | 109  | 9.9965466 | 421  | 10.0034532 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8477728 | 113  | 9.8511838 | 109  | 9.9965887 | 421  | 10.0034111 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8477940 | 112  | 9.8511629 | 108  | 9.9966308 | 421  | 10.0033690 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8478153 | 113  | 9.8511420 | 109  | 9.9966729 | 421  | 10.0033269 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8478365 | 113  | 9.8511211 | 109  | 9.9967150 | 421  | 10.0032848 | 0  |    |
| 47  |    | 9.8478577 | 112  | 9.8511002 | 108  | 9.9967571 | 421  | 10.0032427 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8478789 | 113  | 9.8510793 | 109  | 9.9967992 | 421  | 10.0032006 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8479001 | 113  | 9.8510584 | 109  | 9.9968413 | 421  | 10.0031585 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8479213 | 112  | 9.8510375 | 108  | 9.9968834 | 421  | 10.0031164 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8479425 | 113  | 9.8510166 | 109  | 9.9969255 | 421  | 10.0030743 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8479637 | 113  | 9.8509957 | 109  | 9.9969676 | 421  | 10.0030322 | 0  |    |
| 48  |    | 9.8479849 | 112  | 9.8509748 | 108  | 9.9970097 | 421  | 10.0029901 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8480061 | 113  | 9.8509539 | 109  | 9.9970518 | 421  | 10.0029480 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8480273 | 113  | 9.8509330 | 109  | 9.9970939 | 421  | 10.0029059 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8480485 | 112  | 9.8509121 | 108  | 9.9971360 | 421  | 10.0028638 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8480697 | 113  | 9.8508912 | 109  | 9.9971781 | 421  | 10.0028217 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8480909 | 113  | 9.8508703 | 109  | 9.9972202 | 421  | 10.0027796 | 0  |    |
| 49  |    | 9.8481121 | 112  | 9.8508494 | 108  | 9.9972623 | 421  | 10.0027375 | 50 |    |
| 100 |    | 9.8481333 | 113  | 9.8508285 | 109  | 9.9973044 | 421  | 10.0026954 | 40 |    |
| 200 |    | 9.8481545 | 113  | 9.8508076 | 109  | 9.9973465 | 421  | 10.0026533 | 30 |    |
| 300 |    | 9.8481757 | 112  | 9.8507867 | 108  | 9.9973886 | 421  | 10.0026112 | 20 |    |
| 400 |    | 9.8481969 | 113  | 9.8507658 | 109  | 9.9974307 | 421  | 10.0025691 | 10 |    |
| 500 |    | 9.8482181 | 113  | 9.8507449 | 109  | 9.9974728 | 421  | 10.0025270 | 0  |    |

45 Deg.

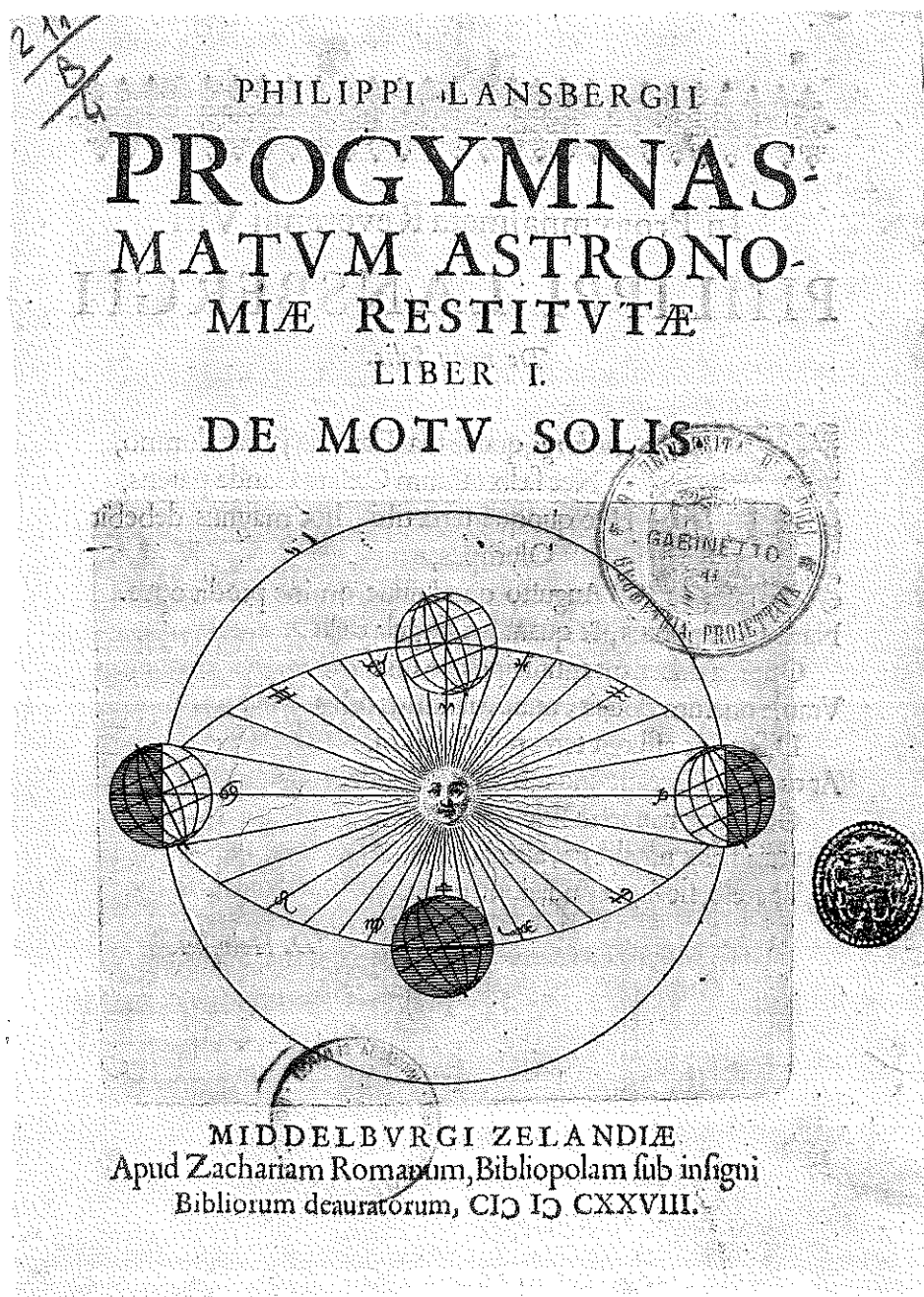
44 Deg.

| I  | //  | Sinus.    | Dif. | Co-Sinus. | Dif. | Tang.       | Dif. | Co-Tang.   | // | I  |
|----|-----|-----------|------|-----------|------|-------------|------|------------|----|----|
| 50 |     | 9.8482180 |      | 9.8507446 |      | 9.9974734   |      | 10.0025266 |    | 50 |
|    | 100 | 9.8482392 | 111  | 9.8507237 | 109  | 9.9975155   | 421  | 10.0024845 | 50 |    |
|    | 200 | 9.8482604 | 111  | 9.8507028 | 110  | 9.9975576   | 421  | 10.0024424 | 40 |    |
|    | 300 | 9.8482815 | 111  | 9.8506818 | 110  | 9.9975997   | 421  | 10.0024003 | 30 |    |
|    | 400 | 9.8483027 | 111  | 9.8506609 | 110  | 9.9976418   | 421  | 10.0023582 | 20 |    |
|    | 500 | 9.8483239 | 111  | 9.8506400 | 110  | 9.9976839   | 421  | 10.0023161 | 10 |    |
|    | 600 | 9.8483450 | 111  | 9.8506190 | 110  | 9.9977260   | 421  | 10.0022740 | 0  |    |
| 51 |     | 9.8483662 | 111  | 9.8505981 | 110  | 9.9977681   | 421  | 10.0022319 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8483874 | 111  | 9.8505771 | 109  | 9.9978103   | 421  | 10.0021897 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8484085 | 111  | 9.8505561 | 110  | 9.9978524   | 421  | 10.0021476 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8484297 | 111  | 9.8505351 | 110  | 9.9978945   | 421  | 10.0021055 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8484508 | 111  | 9.8505143 | 110  | 9.9979366   | 421  | 10.0020634 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8484720 | 111  | 9.8504933 | 110  | 9.9979787   | 421  | 10.0020213 | 0  |    |
| 52 |     | 9.8484931 | 111  | 9.8504723 | 110  | 9.9980208   | 421  | 10.0019792 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8485143 | 111  | 9.8504514 | 110  | 9.9980629   | 421  | 10.0019371 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8485354 | 111  | 9.8504304 | 110  | 9.9981050   | 421  | 10.0018950 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8485566 | 111  | 9.8504095 | 110  | 9.9981471   | 421  | 10.0018529 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8485777 | 111  | 9.8503885 | 110  | 9.9981892   | 421  | 10.0018108 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8485988 | 111  | 9.8503675 | 110  | 9.9982313   | 421  | 10.0017687 | 0  |    |
| 53 |     | 9.8486200 | 111  | 9.8503466 | 110  | 9.9982734   | 421  | 10.0017266 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8486412 | 111  | 9.8503256 | 110  | 9.9983155   | 421  | 10.0016845 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8486623 | 111  | 9.8503046 | 110  | 9.9983576   | 421  | 10.0016424 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8486834 | 111  | 9.8502836 | 110  | 9.9983997   | 421  | 10.0016003 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8487045 | 111  | 9.8502626 | 110  | 9.9984418   | 421  | 10.0015582 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8487257 | 111  | 9.8502417 | 110  | 9.9984839   | 421  | 10.0015161 | 0  |    |
| 54 |     | 9.8487468 | 111  | 9.8502207 | 110  | 9.9985260   | 421  | 10.0014740 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8487679 | 111  | 9.8501997 | 110  | 9.9985681   | 421  | 10.0014319 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8487891 | 111  | 9.8501787 | 110  | 9.9986102   | 421  | 10.0013898 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8488102 | 111  | 9.8501577 | 110  | 9.9986523   | 421  | 10.0013477 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8488313 | 111  | 9.8501367 | 110  | 9.9986944   | 421  | 10.0013056 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8488524 | 111  | 9.8501157 | 110  | 9.9987365   | 421  | 10.0012635 | 0  |    |
| 55 |     | 9.8488735 | 111  | 9.8500947 | 110  | 9.9987786   | 421  | 10.0012214 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8488946 | 111  | 9.8500737 | 110  | 9.9988207   | 421  | 10.0011793 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8489158 | 111  | 9.8500527 | 110  | 9.9988628   | 421  | 10.0011372 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8489369 | 111  | 9.8500317 | 110  | 9.9989049   | 421  | 10.0010951 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8489580 | 111  | 9.8500107 | 110  | 9.9989470   | 421  | 10.0010530 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8489791 | 111  | 9.8499897 | 110  | 9.9989891   | 421  | 10.0010109 | 0  |    |
| 56 |     | 9.8490002 | 111  | 9.8499687 | 110  | 9.9990312   | 421  | 10.0009688 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8490213 | 111  | 9.8499477 | 110  | 9.9990733   | 421  | 10.0009267 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8490424 | 111  | 9.8499267 | 110  | 9.9991154   | 421  | 10.0008846 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8490635 | 111  | 9.8499057 | 110  | 9.9991575   | 421  | 10.0008425 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8490846 | 111  | 9.8498847 | 110  | 9.9991996   | 421  | 10.0008004 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8491057 | 111  | 9.8498637 | 110  | 9.9992417   | 421  | 10.0007583 | 0  |    |
| 57 |     | 9.8491268 | 111  | 9.8498426 | 110  | 9.9992838   | 421  | 10.0007162 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8491479 | 111  | 9.8498216 | 110  | 9.9993259   | 421  | 10.0006741 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8491689 | 111  | 9.8498006 | 110  | 9.9993680   | 421  | 10.0006320 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8491900 | 111  | 9.8497796 | 110  | 9.9994101   | 421  | 10.0005899 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8492111 | 111  | 9.8497585 | 110  | 9.9994522   | 421  | 10.0005478 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8492322 | 111  | 9.8497375 | 110  | 9.9994943   | 421  | 10.0005057 | 0  |    |
| 58 |     | 9.8492533 | 111  | 9.8497165 | 110  | 9.9995364   | 421  | 10.0004636 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8492743 | 111  | 9.8496955 | 110  | 9.9995785   | 421  | 10.0004215 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8492954 | 111  | 9.8496744 | 110  | 9.9996206   | 421  | 10.0003794 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8493165 | 111  | 9.8496534 | 110  | 9.9996627   | 421  | 10.0003373 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8493375 | 111  | 9.8496323 | 110  | 9.9997048   | 421  | 10.0002952 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8493586 | 111  | 9.8496113 | 110  | 9.9997469   | 421  | 10.0002531 | 0  |    |
| 59 |     | 9.8493797 | 111  | 9.8495902 | 110  | 9.9997890   | 421  | 10.0002110 | 50 |    |
|    | 100 | 9.8494007 | 111  | 9.8495691 | 110  | 9.9998311   | 421  | 10.0001689 | 40 |    |
|    | 200 | 9.8494218 | 111  | 9.8495481 | 110  | 9.9998732   | 421  | 10.0001268 | 30 |    |
|    | 300 | 9.8494428 | 111  | 9.8495271 | 110  | 9.9999153   | 421  | 10.0000847 | 20 |    |
|    | 400 | 9.8494639 | 111  | 9.8495060 | 110  | 9.9999574   | 421  | 10.0000426 | 10 |    |
|    | 500 | 9.8494850 | 111  | 9.8494850 | 110  | to coincide | 421  | 10.0000000 | 0  |    |
| I  | //  | Co-Sinus. | Dif. | Sinus.    | Dif. | Co-Tang.    | Dif. | Tang.      | // | I  |



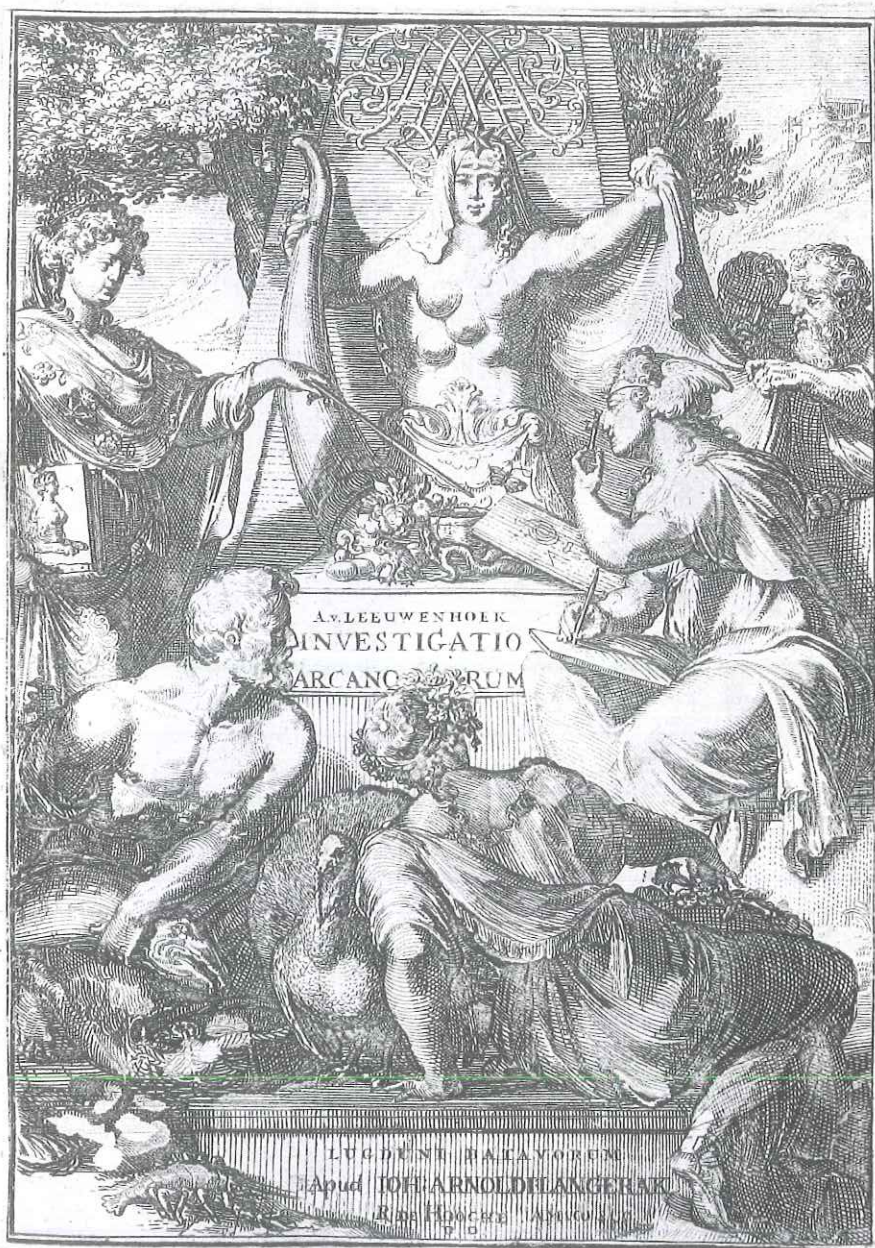
*Opus tessellatum, quod Romę reperitur in medio  
pauimenti S. M. Maioris*



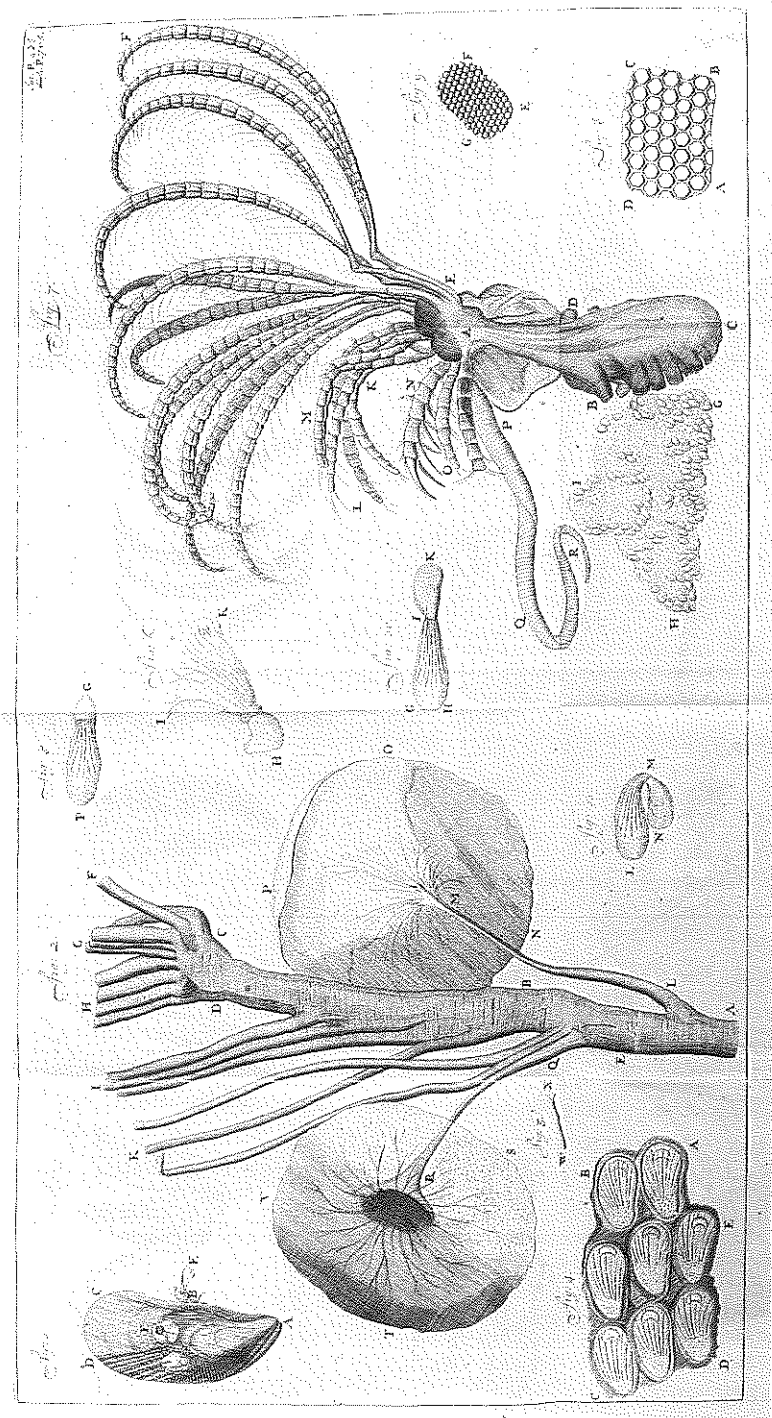














## LECTORI BENEVOLO SALUTEM.



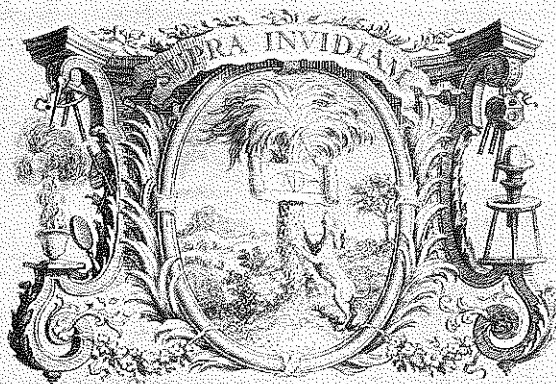
**L**ECTORI consilium atque institutum suum laudanti plerumque obicitur illud, *quis Mercator merces unquam vituperavit?* Mihi verò, si laudare vellem consilium à me susceptum has edendi Litteras, timendum esset ne regeretur, ut quondam cuidam **HERCULEM** laudare molienti, *quis unquam talia vituperavit?* Adeo manifestum est utilissimas esse Doctorum Reipublicæ Doctorum Epistolas. Etenim, ut verbis utar Celeberrimi **BACONIS** \*, *nihil sanius, nihil prestantius, quàm hujusmodi Epistole. Habent enim plus nativi sensus, quàm Orationes; (addi meritò potest & quàm libri;) plus etiam maturitatis, quàm colloquia subita.* Quod si consilium hujusmodi in genere commendare supervacaneum est; tempus omnino tererem, si quid pro his peculiariter Epistolis dicerem. Leviter  
*Commerc. Epist. Tom. I.* \* evolve

\* De Augmentis Scientiarum, lib. II. cap. XII.

VIRORUM CELEBERR.  
*GOT. GUL. LEIBNITII*  
 ET  
*JOHAN. BERNOULLII*  
 COMMERCIIUM  
 PHILOSOPHICUM  
 ET  
 MATHEMATICUM.

---

*TOMUS PRIMUS,*  
 Ab ANNO 1694. ad ANNUM 1699.



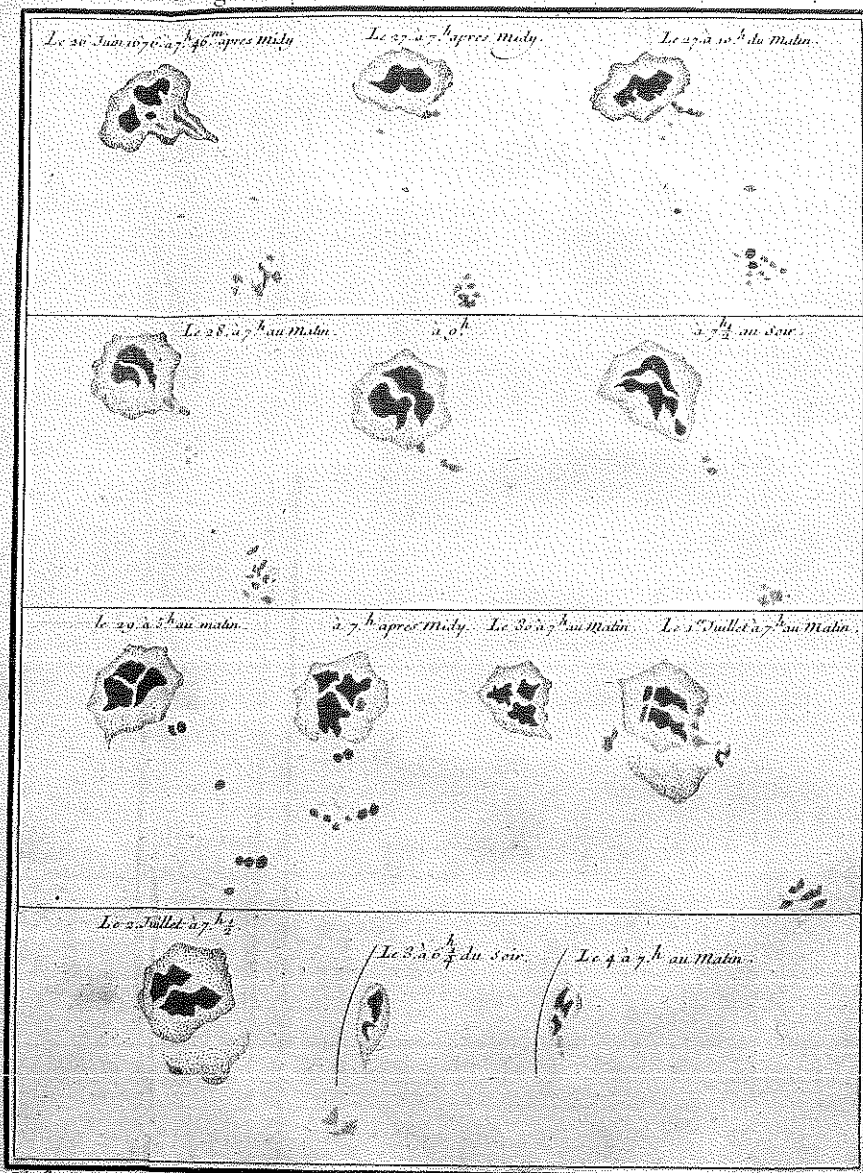
LAUSANNÆ & GENEVÆ,  
 Sumpt. MARCI-MICHAELIS BOUSQUET & Socior.

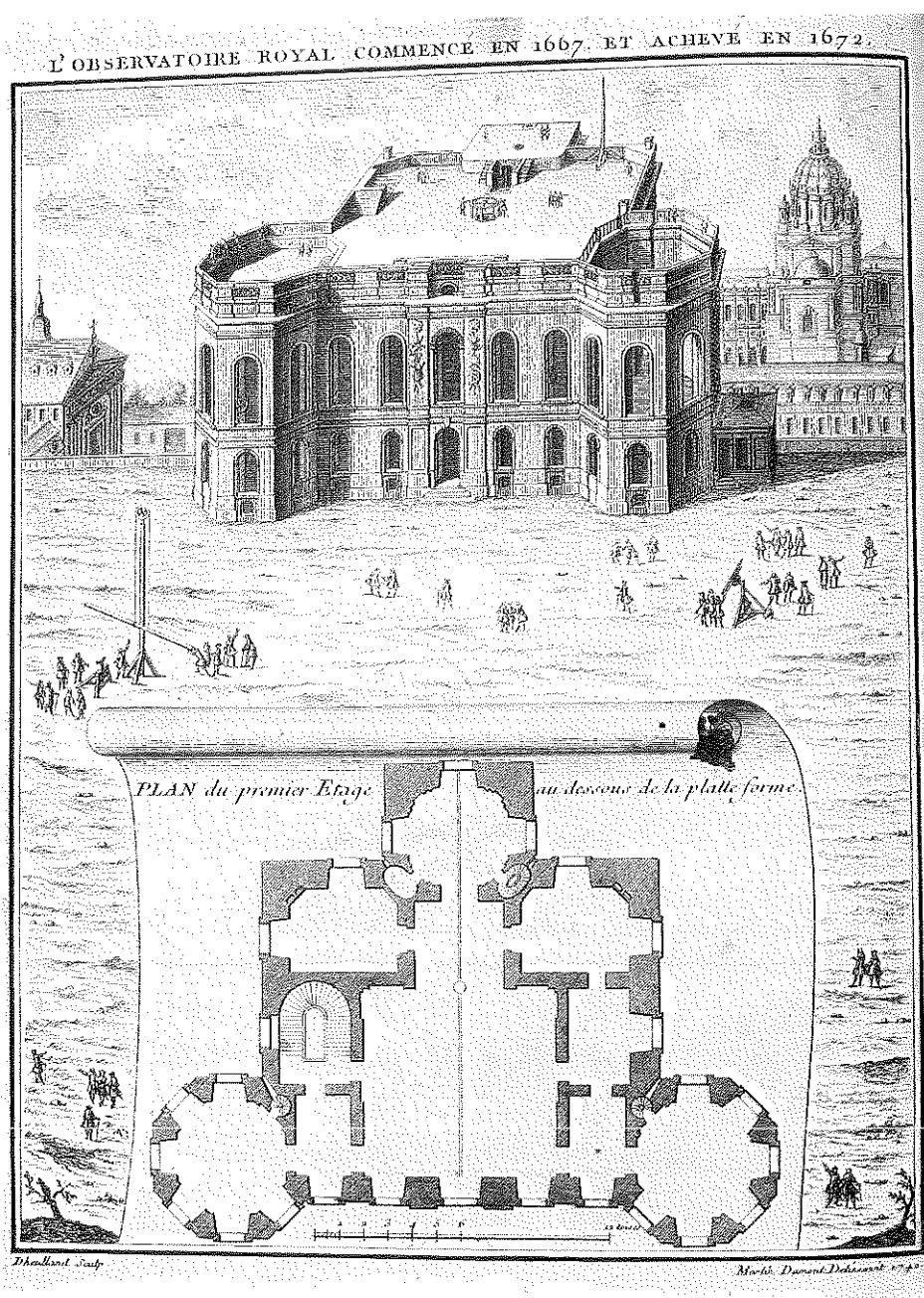
---

MDCCXLV.



Configuration de la Tache du Soleil observée en 1676. PL. II. Page 256.





DELLE  
PROGRESSIONI E SERIE

LIBRI DUE

DEL P. FRANCESCO LUINO

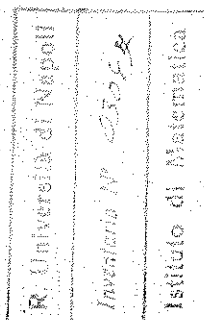
della Compagnia di Gesù

COLL' AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

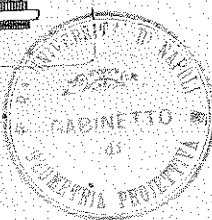
DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

della medesima Compagnia.



4  
110 589

IN MILANO, MDCCLXVII.  
Appresso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore.  
Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

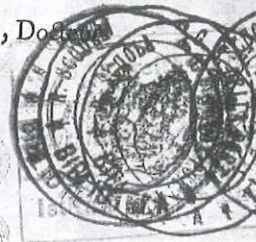
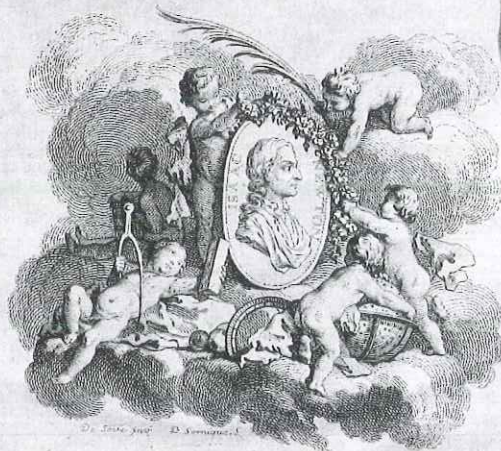




EXPOSITION  
DES  
DÉCOUVERTES  
PHILOSOPHIQUES  
DE M. LE CHEVALIER NEWTON.

PAR M. MACLAURIN, DE LA SOCIÉTÉ ROYALE  
de Londres, &c.

Ouvrage traduit de l'Anglois par M. LAVIROTTE, Docteur  
en Médecine. D. L. F. D. M.



*Inv. 591*

A PARIS,  
Chez } DURAND, rue S. Jacques, au Griffon.  
PISSOT, Quay des Augustins, à la Sagesse.

M. DCC. XLIX.

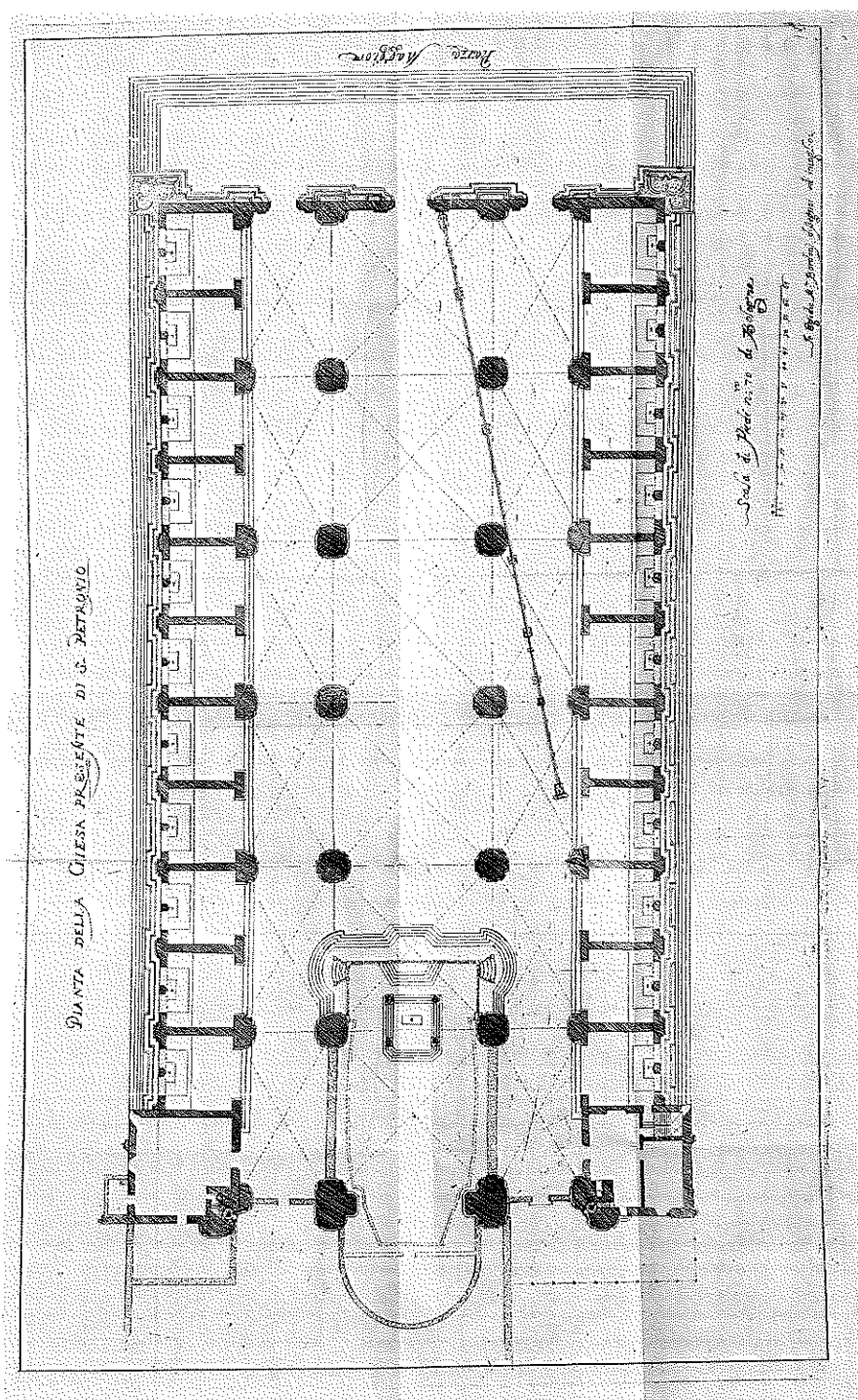
*Avec Approbation & Privilège du Roi.*

UNIVERSITA' DI NAPOLI  
Dipartimento  
di Matematica e Applicazioni  
N. 01875 d'inventario









DE GNOMONE  
MERIDIANO

BONONIENSI

AD DIVI PETRONII

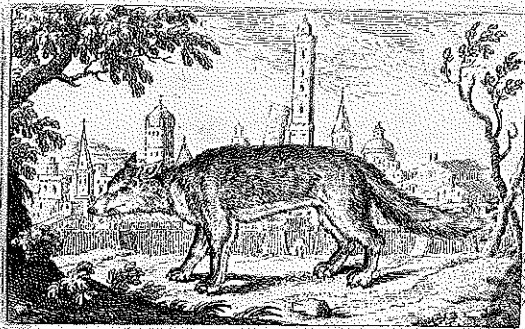
*Deque observationibus Astronomicis eo instrumento  
ab ejus constructione*

AD HOC TEMPUS PERACTIS

AUCTORE

EUSTACHIO MANFREDIO

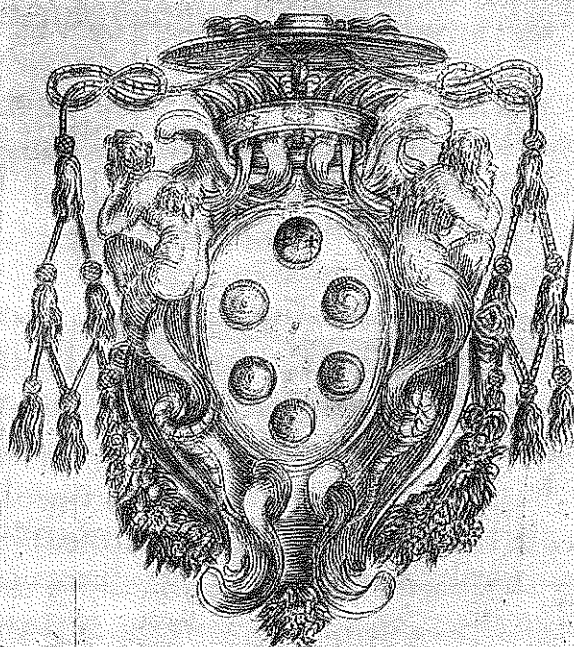
BONONIENSIS GYMNASII AC SCIENTIARUM  
INSTITUTI ASTRONOMO.



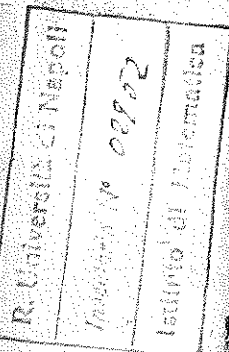
BONONIÆ MDCCXXXVI.

Ex Typographia LÆLII A VULPE.  
*Superiorum facultate.*

D E  
**RESISTENTIA**  
**SOLIDORVM**  
**ALEXANDRI MARCHETTI**  
 IN ALMA PISANA ACADEMIA  
 Ordinariam Philosophiam publicè profitentis.



FLORENTIÆ, Typis Vincentij Vangelisti, & Petri Matini,  
 Typographi S.M.D. Superiorum permissu. MDCLXIX.



# OEUVRES DE M<sup>R</sup>. MARIOTTE,

*de l'Académie Royale des Sciences;*

**DIVISÉES EN DEUX TOMES,**

Comprenant tous les Traitez de cet Auteur,  
tant ceux qui avoient déjà paru séparément,  
que ceux qui n'avoient pas encore été publiez;

*Imprimées sur les Exemplaires les plus exacts & les plus complets;  
Revuës & corrigées de nouveau.*

**TOME PREMIER.**



**A LEIDE,**

Chez **PIERRE VANDER Aa,**  
*Marchand Libraire, Imprimeur de l'Université & de la Ville.*

**M D C C X V I I .**





# NOTIZIE ISTORICHE E CRITICHE

INTORNO

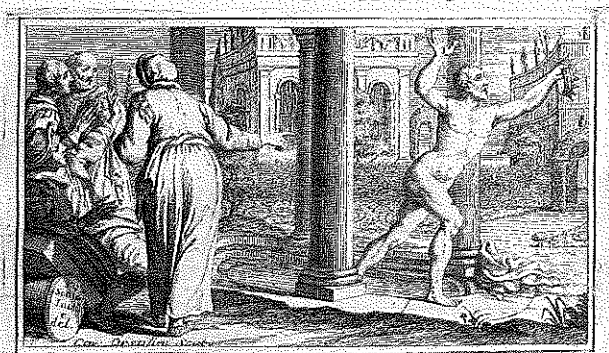
ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,  
ED AGLI SCRITTI

DI

## ARCHIMEDE SIRACUSANO

DEL

CO. GIAN-MARIA MAZZUCHELLI  
BRESCIANO.



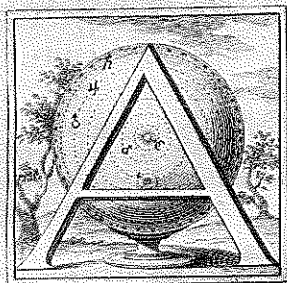
IN BRESCIA. MDCCCXXXVII.

Presso GIAN-MARIA RIZZARDI.

*Colla Facoltà de Superiori.*



**NOTIZIE**  
**ISTORICHE E CRITICHE**  
 INTORNO ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,  
 ED AGLI SCRITTI  
 DI  
**ARCHIMEDE SIRACUSANO.**



Archimede, che da Cicerone (1) fu chiamato un ingegno divino, ebbe per patria Siracusa, Città celebre della Sicilia. Ignoto ci è il tempo preciso della sua nascita, non essendoci, per quanto io sappia, Scrittore alcuno degli Antichi, che ce l'abbia notato. Solo avendoci

1.  
Luogo,  
e tempo  
della sua  
nascita.

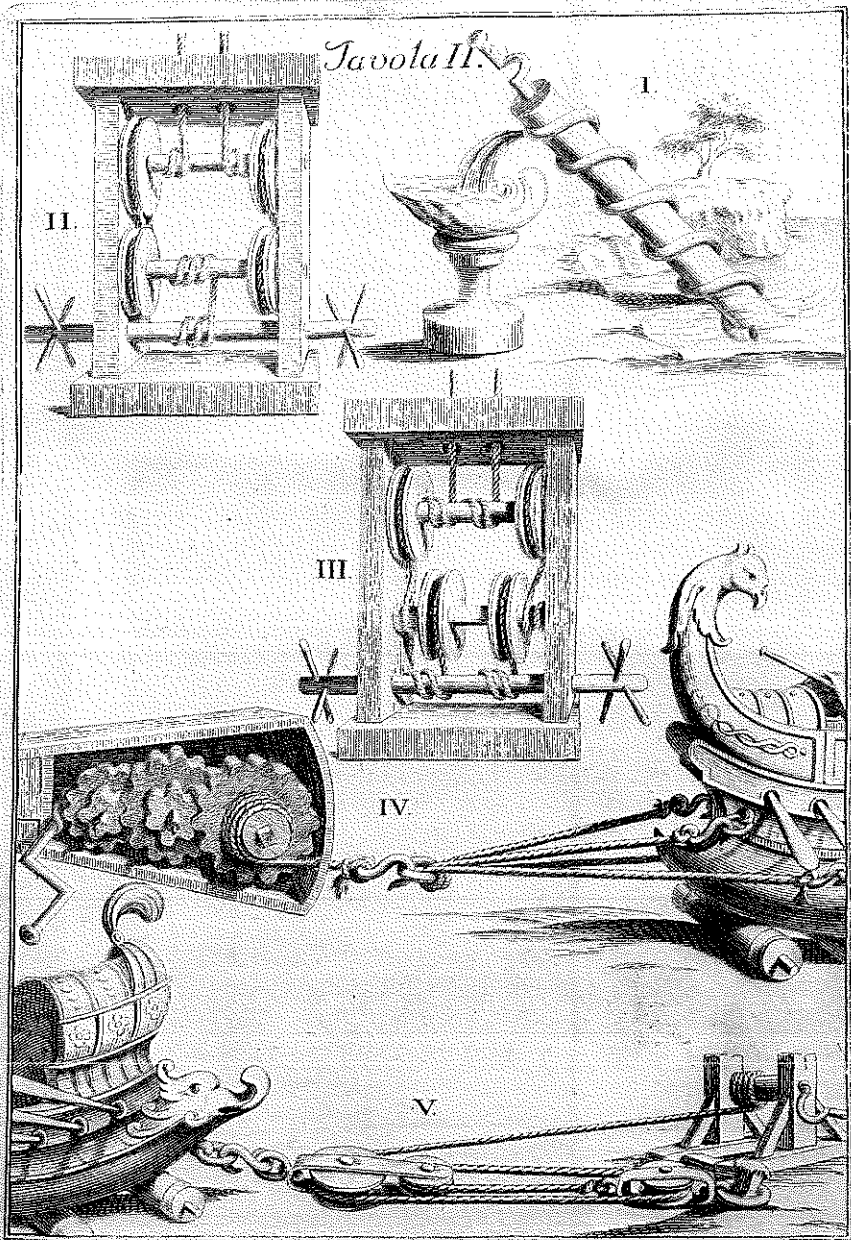
Giovanni Tzerze (2) riferito, che Archimede ha trapassati i settantacinque anni di vita, noi facilmente possiamo immaginarci intorno a qual tempo sia nato col dedurre questo dall' anno della sua morte, la quale cadde-

(1) *Lib. I. Tuscul.*

(2) *Hist. 35. Chil. 2. Χρόνος τε ἐβδόμημιοντα καὶ πέντε περὶ λαύων.*

A (1) *Ra.*





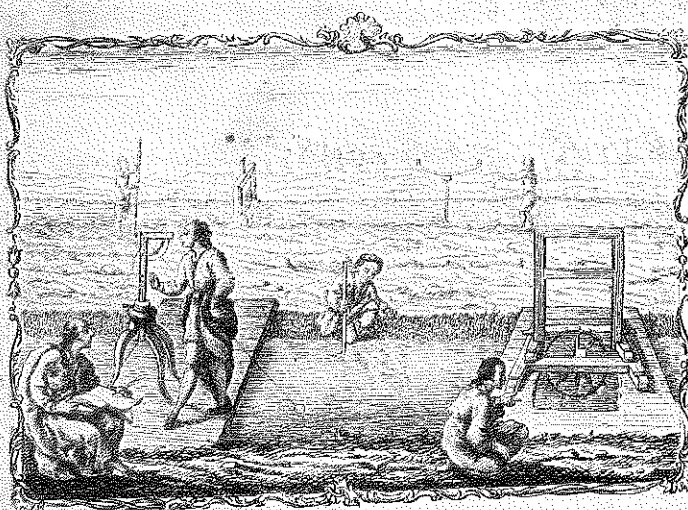
# SPERIMENTI IDRAULICI

PRINCIPALMENTE DIRETTI A CONFERMARE LA TEORICA,  
E FACILITARE LA PRATICA DEL MISURARE  
LE ACQUE CORRENTI

DI FRANCESCO DOMENICO MICHELOTTI

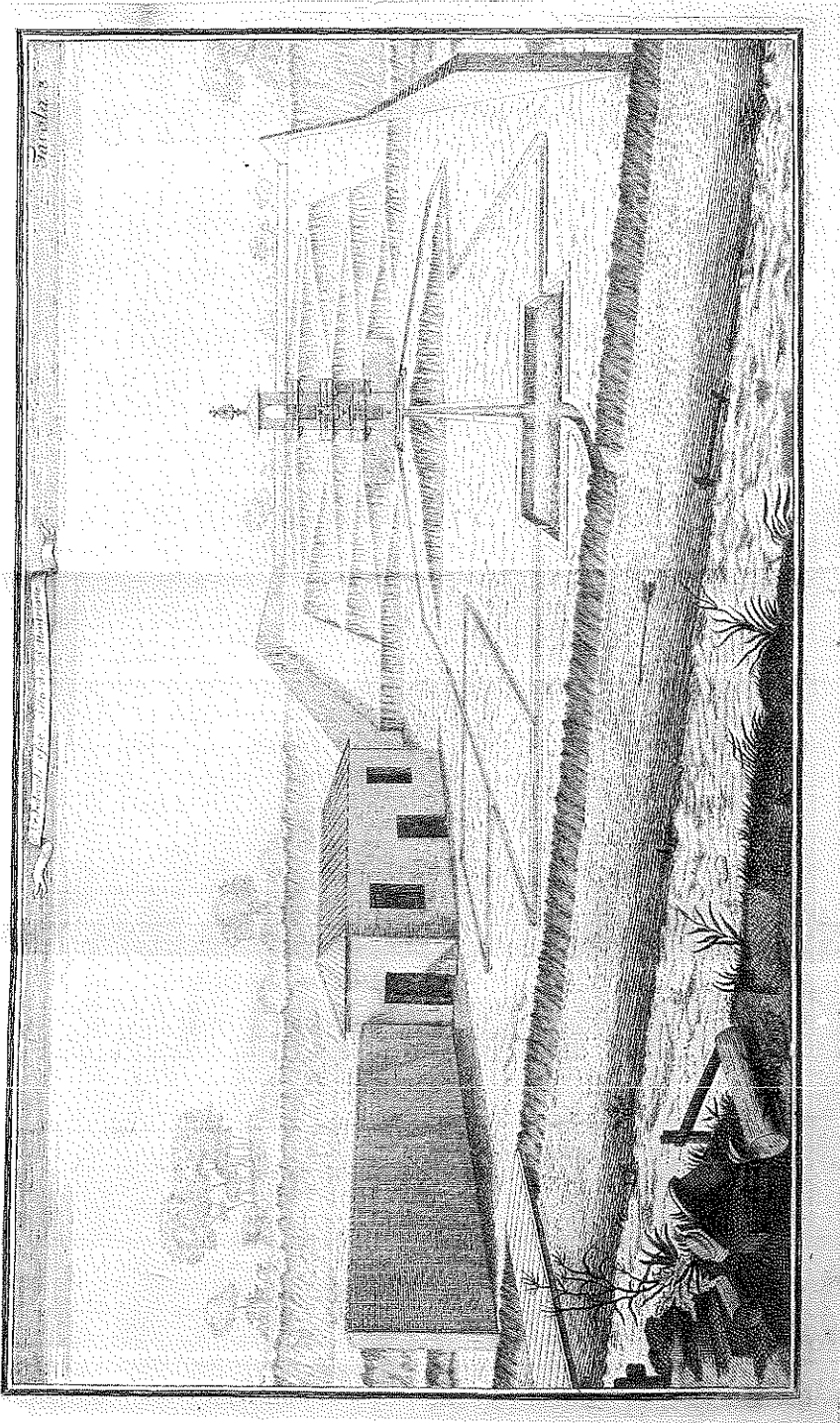
PROFESSORE DI MATEMATICA

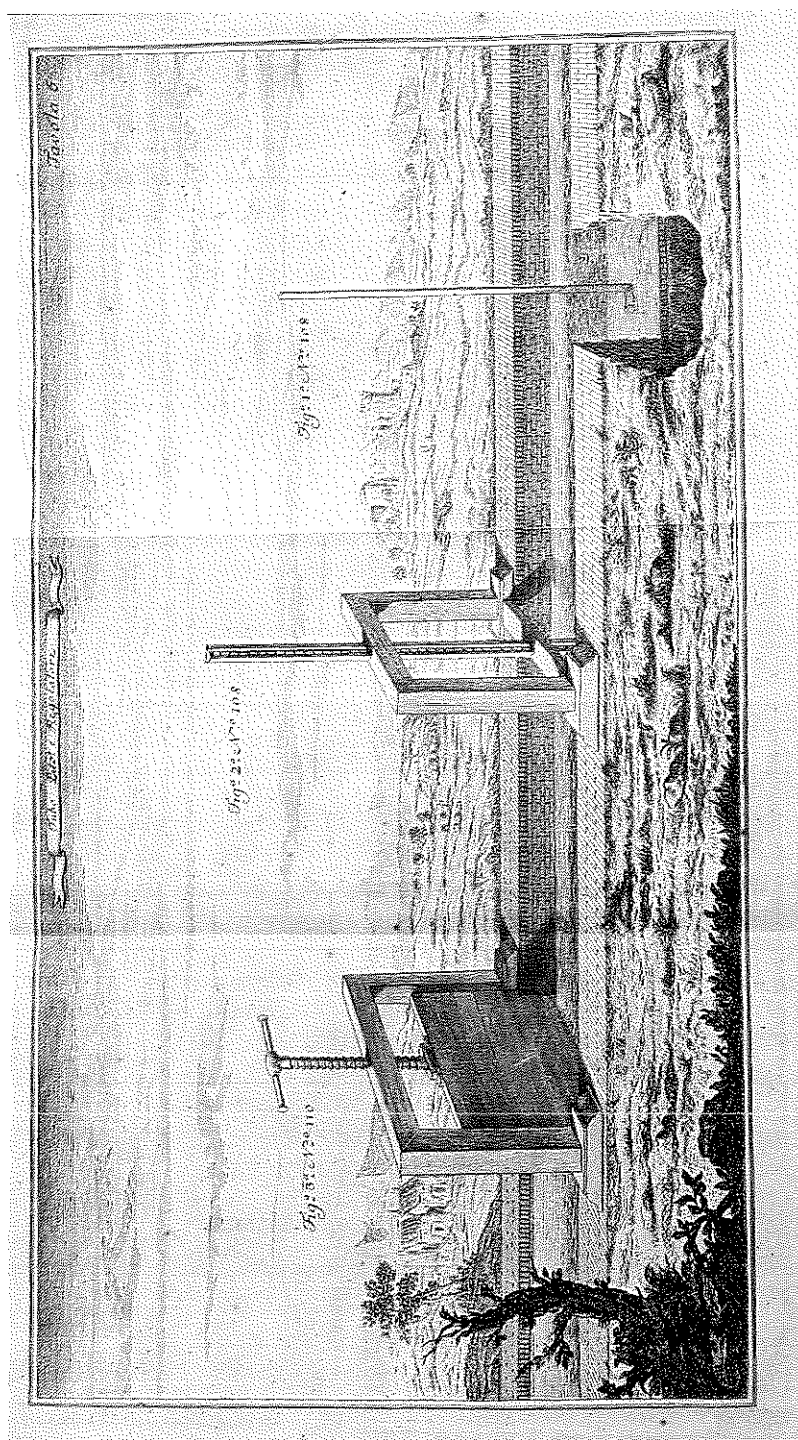
NELLA REGIA UNIVERSITÀ DI TORINO.



IN TORINO,  
NELLA STAMPERIA REALE.

|                        |  |
|------------------------|--|
| MDCCLXXII              |  |
| Inventario n. 03019    |  |
| Istituto di Matematica |  |



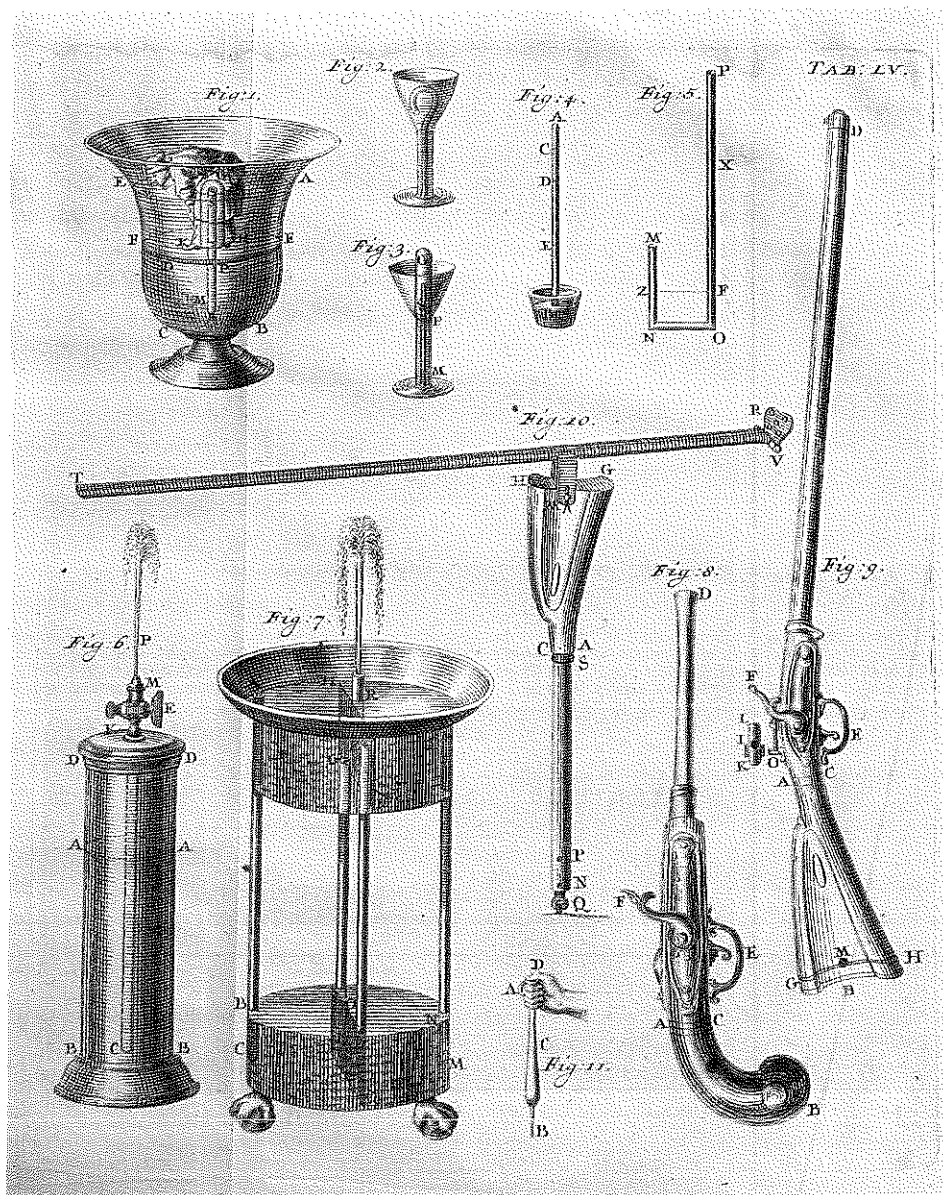




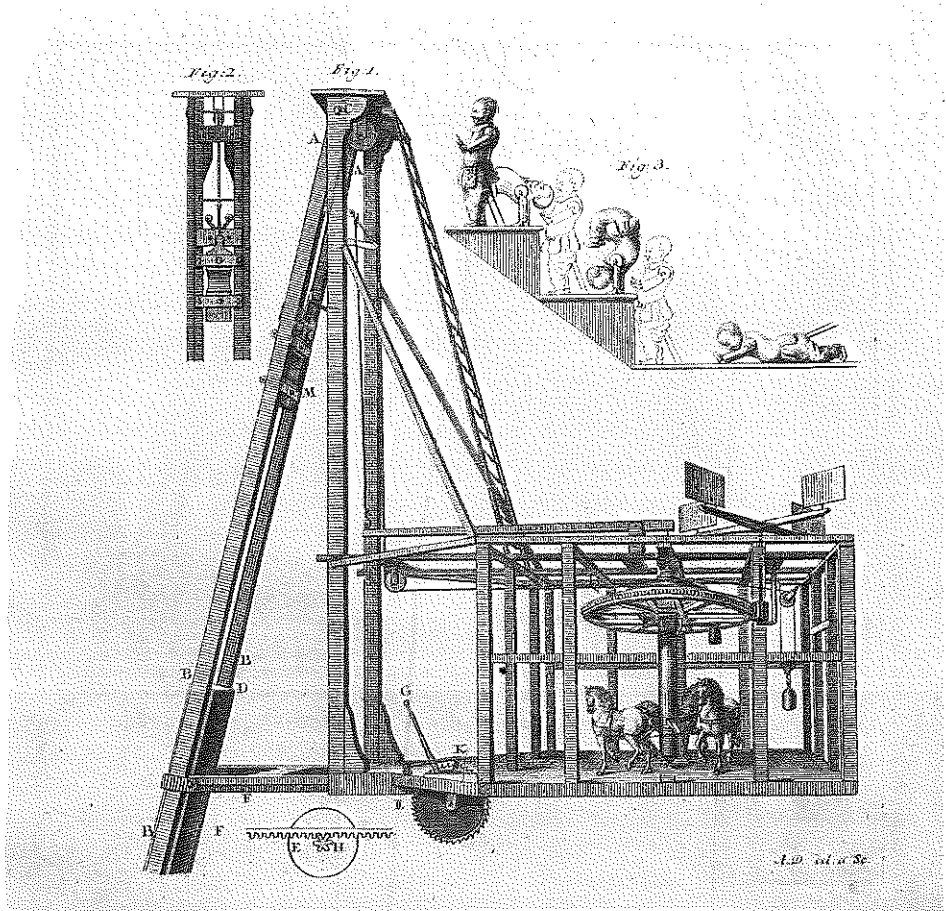
PETRUS VAN MUSSCHENBROEK, LUGD: BAT:  
PH: ET M: R: PHIL: MATH: ET ASTRON: PROF: IN ACAD: ULTRAJ:

Quisquis scire cupis, quo Musschenbroekius ore  
Floruerit, vegeto robore talis erat.  
Quem Natura suis adytis admisit, et ultro  
Cui Dea secretos pandit amica sinus.  
Gallia quem celebrat, Britones cum laude Edunt.  
Hunc Batavus civem gaudet habere suum.

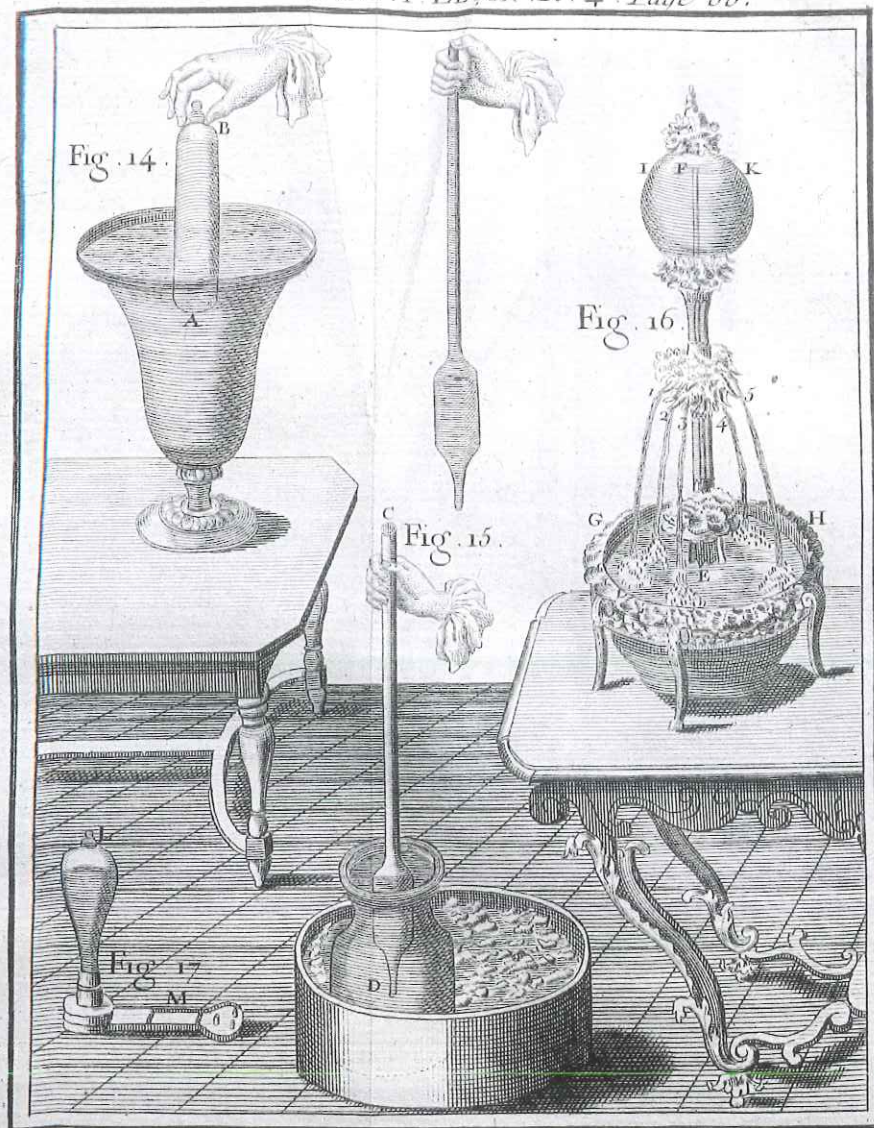
DEUSD' SMALPRAEDINGA





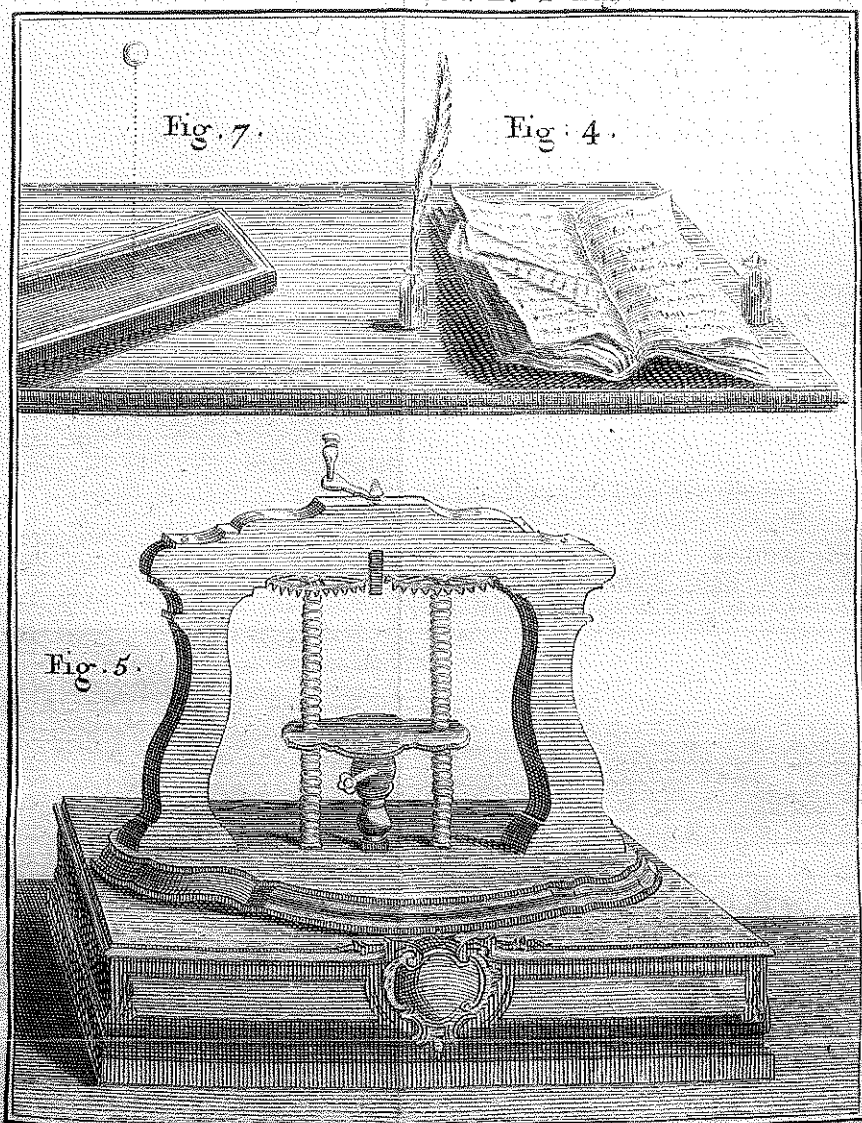


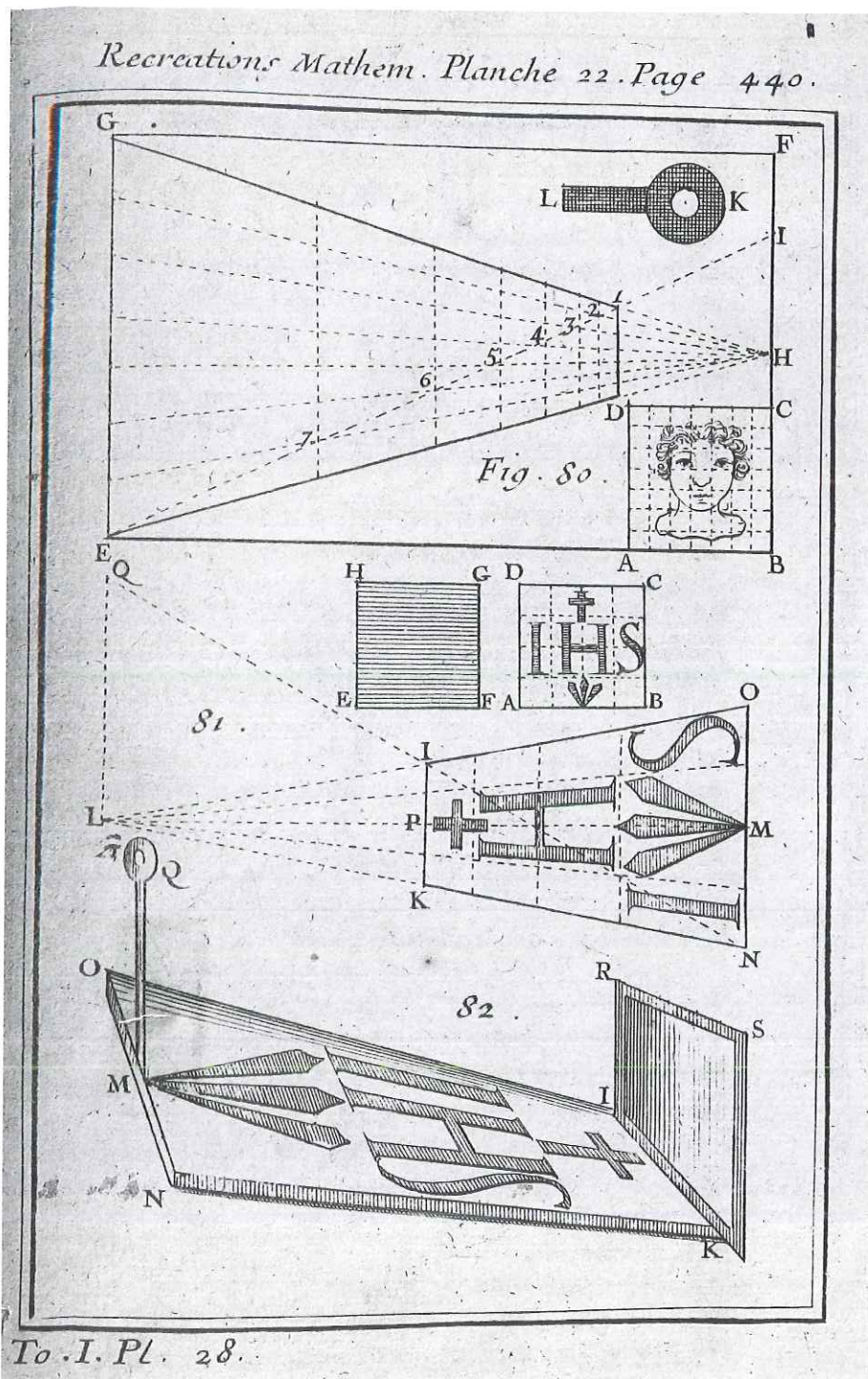
TOM. I. I. LEÇON. Pl. 4. Page 80.



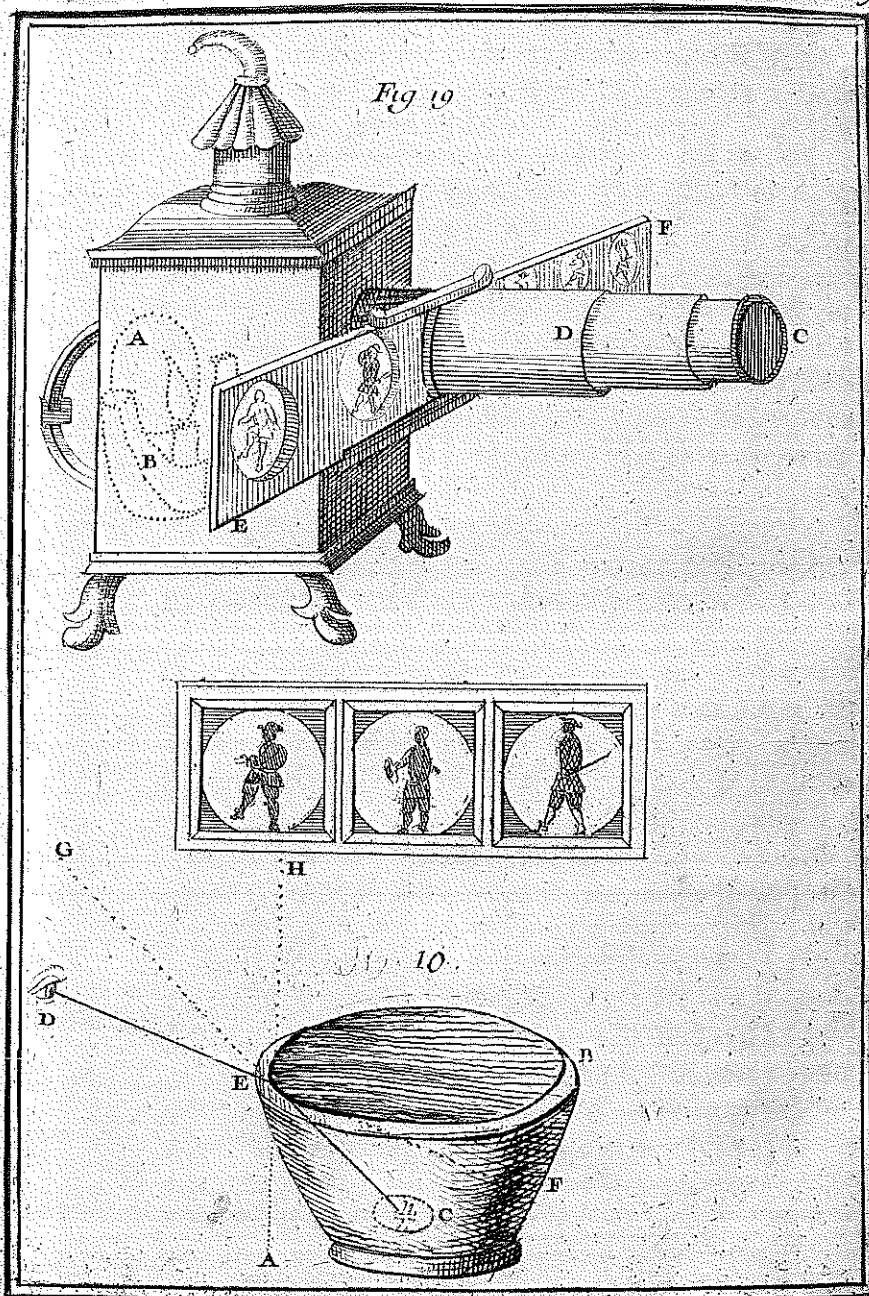


*TOM. II. LECON Pl. 2. Page 120.*







*Recreations Mathematiques Optique Planche 6: \*Pag. 4*

To. I. Pl. 27



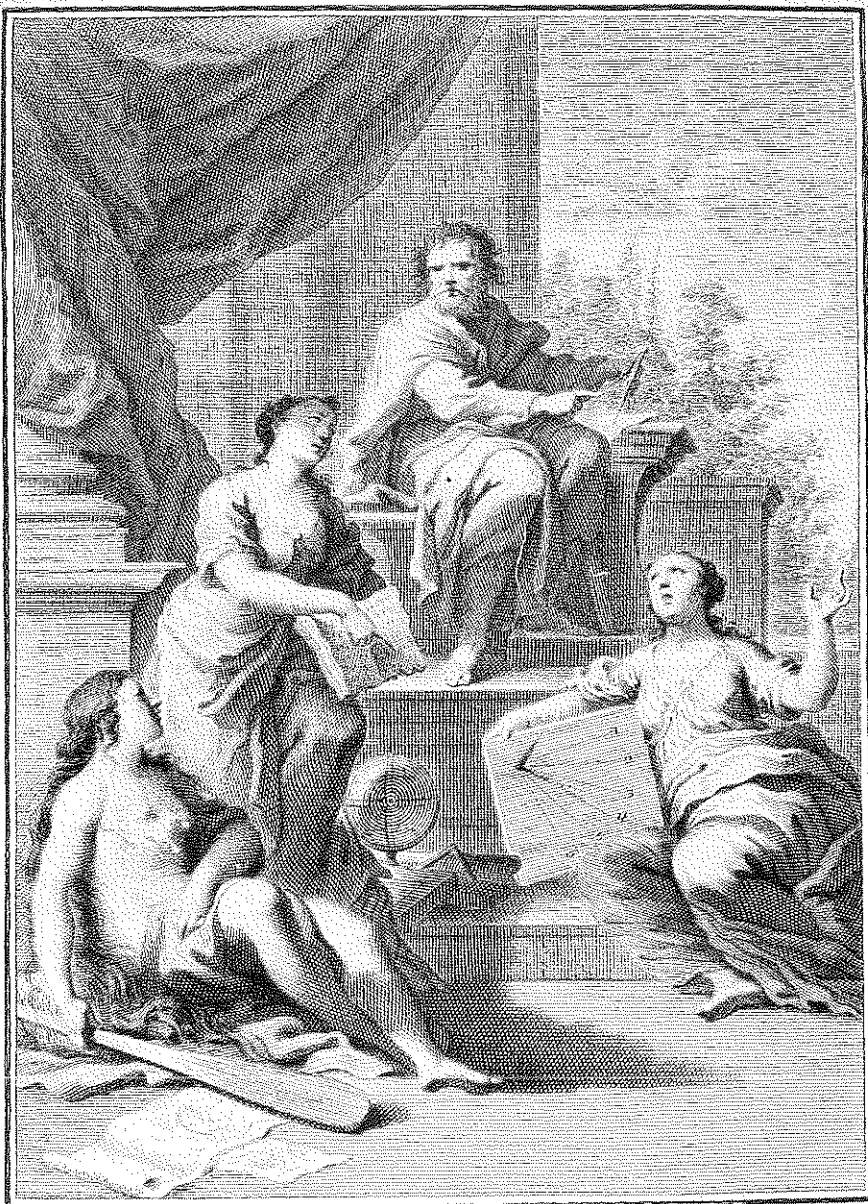
## S E Z I O N E II.

183

## Num. IV.

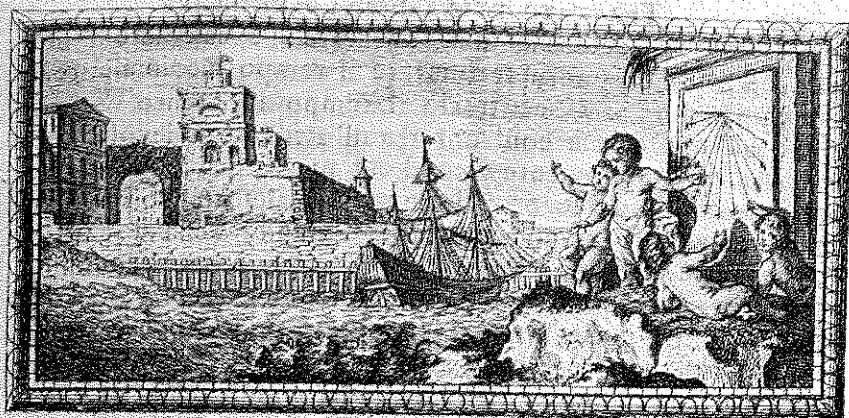
Tavola I. che serve per l' Ascensione retta del Sole.

| Gradi<br>de' Seg. | Y<br>G. | ☾<br>G. | Parti<br>comp.<br>M. S. | ♄<br>G. | M.<br>G. | Parti<br>comp.<br>M. S. | ♅<br>G. | ♆<br>G. | Parti<br>comp.<br>M. S. | ♁<br>G. | ♂<br>G. | Parti<br>comp.<br>M. S. |
|-------------------|---------|---------|-------------------------|---------|----------|-------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|-------------------------|
| 0                 | 0       | 180     | 0 0                     | 27      | 207      | 54 10                   | 57      | 237     | 48 36                   | 90      | 270     | 0 0                     |
| 1                 | 0       | 180     | 55 2                    | 28      | 208      | 51 32                   | 58      | 238     | 51 9                    | 91      | 271     | 5 25                    |
| 2                 | 1       | 181     | 50 4                    | 29      | 209      | 49 3                    | 59      | 239     | 53 53                   | 92      | 272     | 10 50                   |
| 3                 | 2       | 182     | 45 7                    | 30      | 210      | 46 42                   | 60      | 240     | 56 47                   | 93      | 273     | 16 14                   |
| 4                 | 3       | 183     | 40 11                   | 31      | 211      | 44 32                   | 61      | 241     | 59 50                   | 94      | 274     | 21 36                   |
| 5                 | 4       | 184     | 35 16                   | 32      | 212      | 42 32                   | 63      | 243     | 3 2                     | 95      | 275     | 26 56                   |
| 6                 | 5       | 185     | 30 23                   | 33      | 213      | 40 41                   | 64      | 244     | 6 24                    | 96      | 276     | 32 14                   |
| 7                 | 6       | 186     | 25 32                   | 34      | 214      | 39 0                    | 65      | 245     | 9 54                    | 97      | 277     | 37 29                   |
| 8                 | 7       | 187     | 20 43                   | 35      | 215      | 37 28                   | 66      | 246     | 13 33                   | 98      | 278     | 42 42                   |
| 9                 | 8       | 188     | 15 56                   | 36      | 216      | 36 6                    | 67      | 247     | 17 21                   | 99      | 279     | 47 51                   |
| 10                | 9       | 189     | 11 11                   | 37      | 217      | 34 55                   | 68      | 248     | 21 18                   | 100     | 280     | 52 56                   |
| 11                | 10      | 190     | 6 30                    | 38      | 218      | 33 54                   | 69      | 249     | 25 24                   | 101     | 281     | 57 57                   |
| 12                | 11      | 191     | 1 53                    | 39      | 219      | 33 5                    | 70      | 250     | 29 35                   | 103     | 283     | 2 53                    |
| 13                | 11      | 191     | 57 20                   | 40      | 220      | 32 22                   | 71      | 251     | 33 55                   | 104     | 284     | 7 44                    |
| 14                | 12      | 192     | 52 51                   | 41      | 221      | 31 52                   | 72      | 252     | 38 21                   | 105     | 285     | 12 29                   |
| 15                | 13      | 193     | 48 26                   | 42      | 222      | 31 35                   | 73      | 253     | 42 53                   | 106     | 286     | 17 7                    |
| 16                | 14      | 194     | 44 6                    | 43      | 223      | 31 28                   | 74      | 254     | 47 31                   | 107     | 287     | 21 37                   |
| 17                | 15      | 195     | 30 50                   | 44      | 224      | 31 30                   | 75      | 255     | 52 16                   | 108     | 288     | 26 5                    |
| 18                | 16      | 196     | 35 40                   | 45      | 225      | 31 43                   | 76      | 256     | 57 7                    | 109     | 289     | 30 25                   |
| 19                | 17      | 197     | 31 35                   | 46      | 226      | 32 8                    | 78      | 258     | 2 3                     | 110     | 290     | 34 36                   |
| 20                | 18      | 198     | 27 37                   | 47      | 227      | 32 44                   | 79      | 259     | 7 4                     | 111     | 291     | 38 42                   |
| 21                | 19      | 199     | 23 45                   | 48      | 228      | 33 31                   | 80      | 260     | 12 9                    | 112     | 292     | 42 39                   |
| 22                | 20      | 200     | 19 58                   | 49      | 229      | 34 28                   | 81      | 261     | 17 18                   | 113     | 293     | 46 27                   |
| 23                | 21      | 201     | 16 18                   | 50      | 230      | 35 36                   | 82      | 262     | 22 31                   | 114     | 294     | 50 6                    |
| 24                | 22      | 202     | 12 45                   | 51      | 231      | 36 55                   | 83      | 263     | 27 46                   | 115     | 295     | 53 36                   |
| 25                | 23      | 203     | 9 20                    | 52      | 232      | 38 26                   | 84      | 264     | 33 4                    | 116     | 296     | 56 58                   |
| 26                | 24      | 204     | 6 1                     | 53      | 233      | 40 7                    | 85      | 265     | 38 24                   | 118     | 298     | 0 20                    |
| 27                | 25      | 205     | 2 52                    | 54      | 234      | 41 58                   | 86      | 266     | 43 46                   | 119     | 299     | 3 13                    |
| 28                | 25      | 205     | 59 50                   | 55      | 235      | 44 0                    | 87      | 267     | 49 10                   | 120     | 300     | 6 7                     |
| 29                | 26      | 206     | 56 56                   | 56      | 236      | 46 13                   | 88      | 268     | 54 35                   | 121     | 301     | 8 51                    |
| 30                | 27      | 207     | 54 10                   | 57      | 237      | 48 36                   | 90      | 270     | 0 0                     | 122     | 302     | 11 24                   |



*Mano. Rodenig. inc. del.*

*Galileo Galilei. Sculp.*

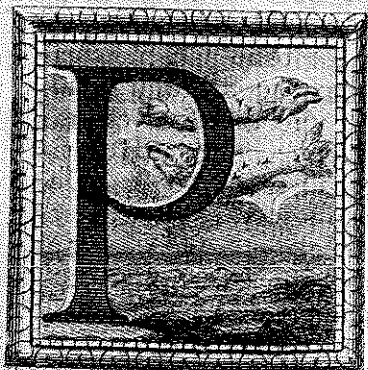


## DE' CIRCOLI VERTICALI, E ORARJ

### S E Z I O N E VI.

#### §. I.

#### *Principj fondamentali della Gnomonica.*



Ripone l'Astronomia, come una delle operazioni sue più rilevanti, quella, di cui ci serviamo per ridurre il tempo medio, ed uguale al vero moto del Sole. Intraprendono gli Astronomi questo assunto di calcolarlo secondo le precise regole, che determina la loro Scienza, ma non perciò possono assicurarsi di avere operato con una tale esattezza, che abbiano sfuggito qualunque ancora minimo errore. Affine dunque di non lasciar luogo ad alcun difetto in una materia di tanta importanza, si tratterà in questa VI. Sezione del modo di trovare la misura del vero, disuguale, ed appa-

l i i

ren-



15. *Bois de France*  
M<sup>r</sup>. du Cabinet de M<sup>r</sup>. le Comte de Bezancon. Maître des Requêtes

GEUVRES

FD

BLAISE PASCAL.

*Cujus gloria neque profuit quisquam laudando, nec vituperando  
quisquam nocuit, cum utrumque summis praediti fuerint  
ingeniis.* Tr. Liv. Ex Hieronym. Procl. Lib. II, in Oskam.

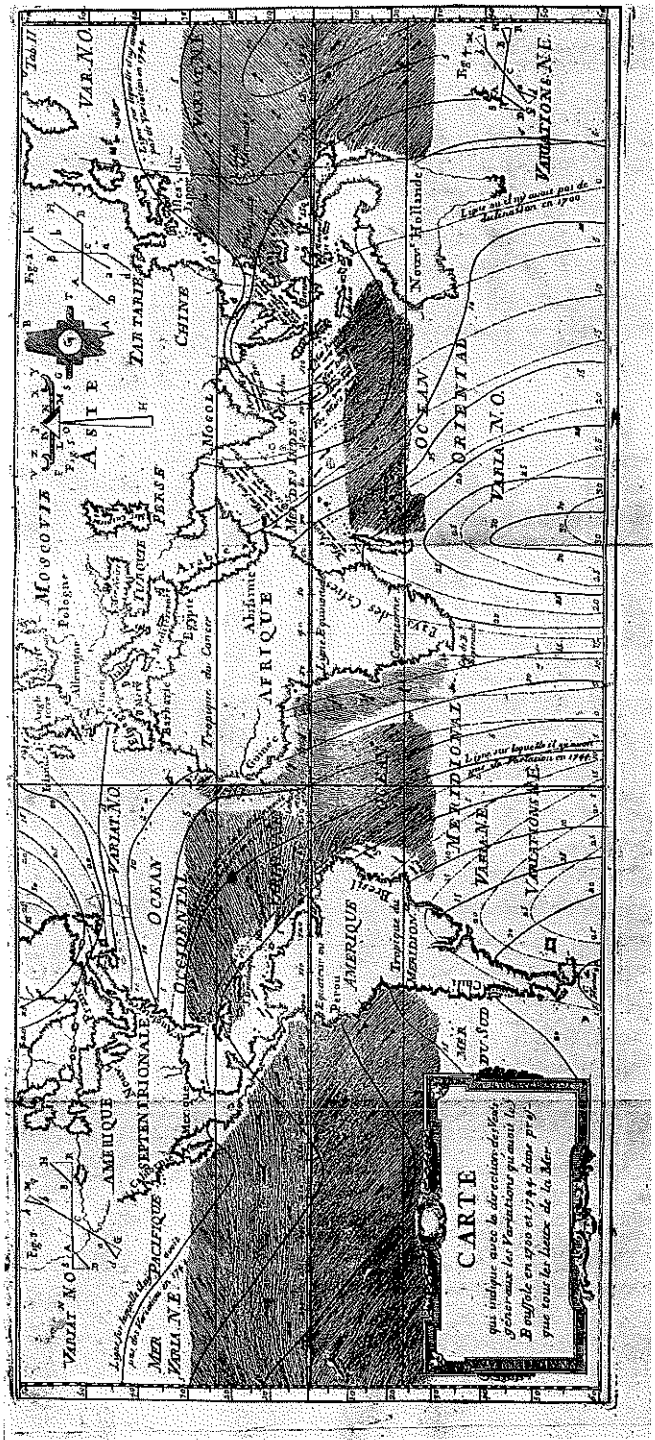
TOME PREMIER.



A LA HAYE,  
CHEZ DETUNE, LIBRAIRE.

M. DCC. LXXIX.





DE  
MAGNETE  
LIBRI QUATUOR

IN DUOS TOMOS DISTRIBUTI

TOMUS I.

CONTINENS LIBRUM PRIMUM ET SECUNDUM

AUCTORE

JOANNE BAPTISTA SCARELLA

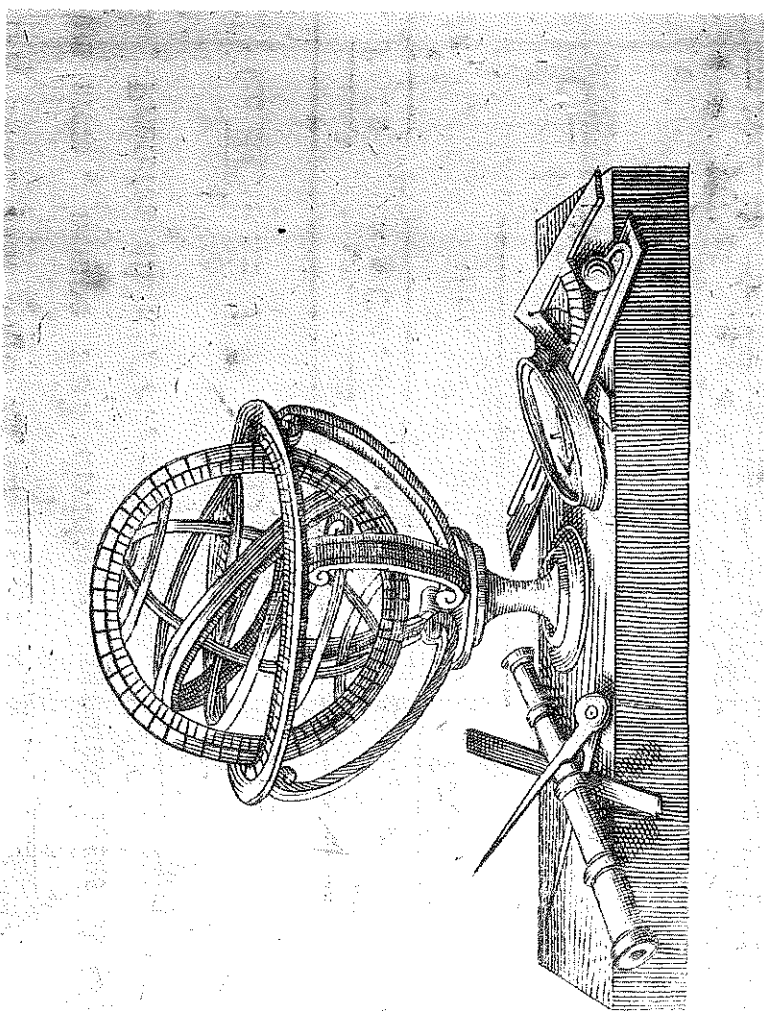
CLERICO REGULARI.



BRIXIÆ ANNO MDCCCLIX.

Excudebat JOANNES-MARIA RIZZARDI.

SUPERIORUM PERMISSU.





## Boundary value problems for harmonic functions on Lipschitz domains

Nota di R. Russo\* e G. Starita\*

Presentata dal Socio Remigio Russo  
(Adunanza del 6 dicembre 2002)

Alla memoria del Prof. Carlo Miranda  
nel ventennale della scomparsa

### Abstract

The present paper is devoted to the study of classical Dirichlet's, Neumann's and Robin's problems associated with the Laplace equation in Lipschitz domains with compact boundaries, not necessarily connected. It is proved that the weak and the variational solutions of such problems are expressed by means of simple and double layer potentials. Only techniques connected with the variational and weak formulations of the problems are used, as well as the continuity of the trace of the double layer potential in  $L^2(\partial\Omega)$  and in  $W^{1,2}(\partial\Omega)$ .

## 1 Introduction

Let  $\Omega_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) be  $m + 1$  domains (open connected sets) of  $\mathbb{R}^n$ , where  $m \in \mathbb{N}_0$  and  $n \geq 2$ , with connected boundaries  $\partial\Omega_i$  and such that

$$\Omega_0 \supset \overline{\Omega}' = \bigcup_{i=1}^m \overline{\Omega}_i.$$

\* Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli, Via Vivaldi, 43, 81100 Caserta (Italy)

---

\* remigio.russo@unina2.it

† giulio.starita@unina2.it

We shall call *bounded* and *exterior* domains, respectively, the regions  $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}'$  and  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}_0$ . In both cases this set will be referred to as  $\Omega$ . Let  $a$  be a function on  $\partial\Omega$ . As is well-known, the classical Dirichlet problem is to find a harmonic function on  $\Omega$ , that is a solution  $u(x)$  to the Laplace equation

$$(1.1) \quad \Delta u = \partial_{x_i x_i}^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

and satisfies the *boundary condition*

$$(1.2) \quad u = a \quad \text{on } \partial\Omega.$$

Naturally, if  $\Omega$  is exterior, to the aim of ensuring uniqueness of the (possible) solution in suitable function classes, relations (1.1)–(1.2) must be completed by *reasonable* conditions at infinity. In this connection, we shall require that<sup>1</sup>

$$(1.3) \quad u = o(r^k),$$

with  $k \in \mathbb{N}_0$  prescribed and where  $r$  is the distance of  $x$  from a fixed point of  $\Omega_0$ . If  $n = 2$  and  $k = 0$ , the above problem has not in general a solution, unless  $a$  satisfies a suitable compatibility condition. In particular, a solution which is constant on  $\partial\Omega$  and tends to zero at infinity does not exist.

If the open sets  $\Omega_i$  are of class  $C^{1,\alpha}$  ( $\alpha > 0$ )<sup>2</sup> and  $a$  is continuous, then system (1.1)–(1.2) has a unique solution in a bounded domain, which can be represented as the sum of a double layer potential and a simple layer potential, with densities whose regularity is the least one among that of the datum and that of the boundary of  $\Omega$ . If  $\Omega$  is an exterior domain and  $k = 0$  in condition (1.3), then the same conclusion is true for  $n > 2$ . For  $n = 2$  a solution vanishing at infinity does exist in the form of a sum of a double layer potential and a simple layer potential with a density having zero mean on  $\partial\Omega$  if and only if

$$\int_{\partial\Omega} a \psi \, d\sigma = 0,$$

where  $\psi$ 's are the densities of the simple layer potentials that are constant on  $\partial\Omega$ . If  $\partial\Omega$  is instead only Lipschitz, then problem (1.1)–(1.2) has a unique variational [resp. weak] solution<sup>3</sup>, provided  $a$  belongs to the trace space  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$

<sup>1</sup>The notation used in this paper is explained at the end of this section.

<sup>2</sup>A domains is of class  $C^{k,\alpha}$ , with  $k \in \mathbb{N}$  and  $\alpha \in [0,1)$ , if its boundary is locally the graph of a function of class  $C^{k,\alpha}$ . If  $\alpha = 0$ , then the domain is said to be Lipschitz. As is well-known, in this case the normal unit vector to its boundary is defined almost everywhere (cf., e.g., [23]).

<sup>3</sup>In the present paper, the adjective *weak*, when applied to a solution of boundary value problems for the Laplace equation, is to be meant in the sense of [23] (solution très faible).

[resp.  $L^2(\partial\Omega)$ ], if  $\Omega$  is bounded or exterior and  $n = 2$ . If  $n > 2$  and  $\Omega$  is exterior, it is necessary to complete the problem by condition (1.3), with  $k = 0$ . Furthermore, for  $n = 2$  and  $\Omega$  exterior the same conclusions hold true if and only if

$$\int_{\partial\Omega} a h \, d\sigma = 0,$$

where  $h$  is a solution to equation (1.1), constant on  $\partial\Omega$  and  $o(r)$  at infinity.

Given a function  $s$  on  $\partial\Omega$  and a nonnegative constant  $\alpha$ , the Robin problem consists of the search for a harmonic function in  $\Omega$  satisfying the boundary condition<sup>4</sup>

$$(1.4) \quad \alpha u \pm \partial_\nu u = s \quad \text{on } \partial\Omega,$$

where the signs  $+$  or  $-$  to be chosen according to whether  $\Omega$  is bounded or not, and  $s$  is assumed to have zero integral mean if  $\alpha = 0$  and  $\Omega$  is bounded. If  $\alpha = 0$  this problem is known as Neumann problem. Under some regularity assumptions, system (1.1)–(1.4) has a solution which can be expressed as a simple layer potential. If  $\Omega$  is bounded, such a solution is unique (up to an arbitrary additive constant when  $\alpha = 0$ ); if instead  $\Omega$  is exterior, then the solution is unique in the class  $\{u : u = o(1)\}$  when  $\alpha > 0$  and (up to an arbitrary additive constant) in the class  $\{u : u = o(r)\}$  when  $\alpha = 0$ . In the case in which  $\partial\Omega$  is Lipschitz, the problem has a variational [resp. weak] solution provided  $s$  belongs to the trace space  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  – the dual space of  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  [resp.  $W^{-1,2}(\partial\Omega)$  – the dual space of  $W^{1,2}(\partial\Omega)$ ] and  $\langle s, 1 \rangle = 0$ , if  $\Omega$  is bounded and  $\alpha = 0$ .

The above reported results belongs to the *classical* pattern and are described in several textbooks (at least, the ones concerning bounded domains). We confine ourselves to quote the monographs [12], [16], [21].

Nel 1977 A.P. Calderón [2] showed that the Cauchy integral defines a continuous operator in  $L^p$ ,  $p \in (1, +\infty)$ , on curves with a small Lipschitz constant, in particular on curves of class  $C^1$ . By using this result E.B. Fabes, M. Jodeit Jr. and N.M. Rivi  re [9] proved that the double layer potential  $w(\varphi)$  and the normal derivative of a simple layer potential with densities in  $L^p(\partial\Omega)$  ( $p > 1$ ) have traces on  $\partial\Omega$  that are almost everywhere equal to  $(\frac{1}{2}\mathcal{I} \pm \mathcal{K})[\varphi]$  for the former, and to  $(-\frac{1}{2}\mathcal{I} \pm \mathcal{K}^*)[\psi]$  for the latter, where  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}^*$  are compact operators in  $L^p(\partial\Omega)$  and  $W^{1,p}(\partial\Omega)$ ,  $p \in (1, +\infty)$ , thus solving, at least for domains of  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 2$ ) with connected boundaries, thanks to the classical theory of Fredholm–Riesz–Schauder [22], the boundary value problems associated to equation (1.1)

<sup>4</sup>The symbol  $\nu$  denotes the unit normal vector to  $\partial\Omega$ , oriented towards  $\Omega$  or towards its complementary set according to whether  $\Omega$  is exterior or bounded. Problem (1.1)–(1.4) is called "Neumann–Newton" problem by J. Necas [23].

with data in  $L^p$  and  $W^{1,p}(\partial\Omega)$  ( $p \in (1, +\infty)$ ). The results of Calderón were extended five years later by R.R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer [3] to arbitrary Lipschitz domains. Thanks to their work and to the methods of [9], it can be proved that the jump conditions hold almost everywhere on the boundary and  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{K}^*$  are continuous in  $L^p(\partial\Omega)$  and  $W^{1,p}(\partial\Omega)$ ,  $p \in (1, +\infty)$ . A little later G. C. Verchota [25], by a simple use of an equality of F. Rellich showed that the operator  $(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)$  is invertible in  $L^2(\partial\Omega)$  and  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  at least for domains with connected boundaries<sup>5</sup>, thus extending the results of [9] to Lipschitz domains. An important feature of the methods of [25] is that they are not linked to the structure of the Laplace equation, but may be extended to not only to strongly elliptic systems [8], but also to the system of linear elasticity [5] and to the Stokes system [10]. An excellent monograph, which reports about the state of art until 1993, is due to C.E. Kenig [15].

As far as we are aware, the existence and uniqueness results by the method of integral equations in Lipschitz domains are restricted to domains with a connected boundary and in more that two dimensions<sup>6</sup>. The aim of the present paper is just to establish the validity of the results known for domains with compact boundaries of class  $C^{1,\alpha}$  ( $\alpha \in (0, 1]$ ) to the Lipschitz case, so extending the results of [25] to domains with not connected boundaries. In particular, we shall show that if  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  [resp.  $s \in L^2(\partial\Omega)$ ], then the variational [resp. weak] solution to the Neumann problem is expressed by a simple layer potential with a density in  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  [resp. in  $L^2(\partial\Omega)$ ]. As far as Dirichlet's problem is concerned, we shall show that, if  $a \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  [resp.  $a \in L^2(\partial\Omega)$ ], then the variational [resp. weak] solution can be expressed as the sum of a double layer potential, with a density in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  [resp. in  $L^2(\partial\Omega)$ ] and a simple layer potential<sup>7</sup>, with a density in  $L^2(\partial\Omega)$ . If  $\Omega$  is an exterior domain and one looks for a solution  $u$  such to the Dirichlet problem such that that  $u = u_\infty + O(r^{1-n})$ , then one sees that such a solution exists if and only if the compatibility condition

$$(1.5) \quad \int_{\partial\Omega} a\psi \, d\sigma = u_\infty \int_{\partial\Omega} \psi \, d\sigma$$

is met and  $u$  is to be expressed as the sum of a simple layer potential with a density having zero mean on  $\partial\Omega$ , a double layer potential and  $u_\infty$ . If  $a \in$

<sup>5</sup>Cf. also Ch. 15 of [19]. In [25] it is also proved that the operator  $(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^*)$  is invertible in  $L^2_0(\partial\Omega)$ , where  $L^2_0(\Omega)$  is the space of all function in  $L^2(\partial\Omega)$  that have zero integral mean on  $\partial\Omega$ .

<sup>6</sup>G. Verchota [25] has considered the internal Dirichlet problem and the Neumann problem in a two-dimensional domain with a connected boundary. Another approach to the problem, similar to that employed in this paper, is due to M. Costabel [4].

<sup>7</sup>This is zero if the domain is bounded has a connected boundary



$L^2(\Omega)$ , then the boundary conditions are satisfied in the sense of *non-tangential convergence* and the solution is unique in both the classes of weak solutions and in the class of harmonic functions whose *non-tangentially maximal functions* belong to  $L^2(\partial\Omega)$ .

It is worth remarking that the results we shall obtain are derived by using only well-known results about variational and weak solutions [23] and, for data in  $L^2(\partial\Omega)$ , the results of [3]. Hence it follows, in particular, that the technique used here does not assume the connection of the boundaries of the considered domains. Furthermore, as they are not linked in any way to the structure of the Laplace equation, but only to its elliptic form and to the existence of fundamental solutions, the results of the present paper can be easily extended to strongly elliptic systems with constant coefficients (see Remark 5.2). We have chosen to fix our attention to the Laplace equation only for its undoubted simplicity and elegance and to avoid unessential formal complications in the exposition

NOTATION - Latin and greek letters, except  $x, y, \xi$  and  $\zeta$  denote scalars (in  $\mathbb{R}$ ) and bold-case latin letters stand for vectors (in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ );  $x, y$  and  $\xi, \zeta$  denote respectively points of domains and surfaces in  $\mathbb{R}^n$ . As usual, we set  $r = r(x) = |x - o|$  with  $o \in \Omega_0 (\neq \emptyset)$ ,  $S_R(y) = \{x : |x - y| < R\}$ ,  $T_R(y) = S_{2R}(y) \setminus S_R(y)$ ,  $S_R = S_R(o)$  e  $T_R = T_R(o)$ . Let  $\mathcal{A}$  be a measurable region of  $\mathbb{R}^n$ ;  $L^2(\mathcal{A})$ ,  $W^{\lambda,2}(\mathcal{A})$  ( $\lambda = 1/2, 2$ ) and  $C^{0,\mu}(\mathcal{A})$ , denote respectively the Lebesgue, Sobolev-Besov spaces and the space of hölderian functions with exponent  $\mu \in [0, 1)$ , endowed with their natural norms [22];  $W^{-\lambda,2}(\mathcal{A})$  stands for the dual space of  $W^{\lambda,2}(\mathcal{A})$ . The symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denotes the duality pairing between  $W^{-\lambda,2}(\mathcal{A})$  and  $W^{\lambda,2}(\mathcal{A})$ ; if  $V$  [resp.  $V^*$ ] is a finite dimensional linear subspace of  $W^{\lambda,2}(\mathcal{A})$  [resp.  $W^{-\lambda,2}(\mathcal{A})$ ], by the symbol  ${}^\perp V$  [resp.  ${}^\perp V^*$ ] we mean the linear space  $\{v^* \in W^{-\lambda,2}(\mathcal{A}) : \langle v^*, v \rangle = 0, \forall v \in V\}$  [resp.  $\{v \in W^{\lambda,2}(\mathcal{A}) : \langle v^*, v \rangle = 0, \forall v^* \in V^*\}$ ].

As usual, denoting by  $\chi$  a field defined in an exterior domain and by  $f$  a positive function in  $[1, +\infty)$ , by the symbols  $\chi = o(f(r))$  and  $\chi = O(f(r))$  we shall mean that  $\lim_{r \rightarrow \infty} \chi(x)/f(r) = 0$  and that  $\chi(x)/f(r)$  is bounded in  $\Omega$ , respectively. Finally, the symbol  $c$  will denote a positive constant whose value is immaterial for our purposes; the numerical value of  $c$  may change from line to line and in the same line it may be, e. g.,  $2c \leq c$ .

## 2 Variational and weak solutions

Throughout the paper we assume that  $\Omega$  is a bounded or an exterior domain with Lipschitz boundary. Also,  $\nu$  will denote the unit normal to  $\partial\Omega$ , outward

if  $\Omega$  is bounded and inward if  $\Omega$  is exterior.

Let  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  and consider the Poisson equation

$$(2.1) \quad \Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

with a boundary datum  $a \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . By a *variational solution* to problem (2.1)–(1.2) we mean a function  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  such that  $\text{tr } u = a$  on  $\partial\Omega$  and<sup>8</sup>

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dv \pm \int_{\Omega} \phi f \, dv = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Let  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  and, for  $\Omega$  bounded and  $\alpha = 0$ ,

$$(2.2) \quad \langle s, 1 \rangle = \int_{\Omega} f \, dv.$$

A *variational solution* to system (2.1)–(1.4) is a function  $u \in W^{1,2}(\Omega)$  such that<sup>9</sup>

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dv \pm \alpha \int_{\partial\Omega} u \phi \, d\sigma \mp \int_{\Omega} \phi f \, dv = \pm \int_{\partial\Omega} s \phi \, d\sigma, \quad \forall \phi \in W^{1,2}(\Omega).$$

As is well-known (see, e.g. [21], [23]), system (2.1)–(1.2) admits a unique variational solution<sup>10</sup> if  $\Omega$  is bounded, and a unique solution which converges at infinity to an assigned constant, for  $n > 2$ , and  $o(\log r)$ , for  $n = 2$ , if  $\Omega$  is exterior. Moreover

$$(2.3) \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|a\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)}.$$

System (2.1)–(1.4) admits a unique variational solution if  $\Omega$  is bounded (up to a constant, if  $\alpha = 0$ ), and a unique solution vanishing at infinity for  $n > 2$  and  $\alpha \neq 0$ ,  $o(\log r)$  for  $n = 2$  and  $\alpha \neq 0$ , and  $o(r)$  (modulo a constant) for  $\alpha = 0$ . Moreover,

$$(2.4) \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|s\|_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega)}.$$

The following regularity result is proved in [23] (Théorème 2.2, p. 256).

**Lemma 2.1.** *Let  $a \in W^{1,2}(\partial\Omega)$  and let  $u$  be the variational solution to system (2.1)–(1.2). Then  $\partial_\nu u \in L^2(\partial\Omega)$ .*

<sup>8</sup>It must be chosen the sign minus [resp. plus] if  $\Omega$  is bounded [resp. exterior].

<sup>9</sup>It must be chosen the signs plus, minus and plus [resp. minus, plus and minus] respectively in the first, second and third integrals if  $\Omega$  is bounded [resp. exterior].

<sup>10</sup>Uniqueness is here understood in the class of all variational solutions.

**Lemma 2.2.** *Let  $s \in L^2(\partial\Omega)$  satisfy (2.2), if  $\Omega$  is bounded and  $\alpha = 0$ , and let  $u$  be the variational solution to system (2.1)–(1.4). Then  $u \in W^{1,2}(\partial\Omega)$ .*

We shall call *strong solutions* that ones expressed by Lemmas 2.1 and 2.2.  
Let

$$(2.5) \quad L^2_{\text{div}}(\Omega) = \{\mathbf{h} \in L^2(\Omega) : \text{div } \mathbf{h} \in L^2(\Omega)\}.$$

The following Lemma is proved in [24].

**Lemma 2.3.** *Let  $\Omega$  be bounded. The map  $\gamma : \mathbf{h} \in C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow (\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nu})|_{\partial\Omega}$  extends to an isomorphism  $\hat{\gamma}$  from  $L^2_{\text{div}}(\Omega)/\text{kern } \hat{\gamma}$  onto  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ . Moreover, for any  $\omega \in W^{1,2}(\Omega)$  and  $\mathbf{h} \in L^2_{\text{div}}(\Omega)$ ,*

$$(2.6) \quad \langle \hat{\gamma}(\mathbf{h}), \omega \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot \nabla \omega \, dv + \int_{\Omega} \omega \, \text{div } \mathbf{h} \, dv$$

Let  $a \in L^2(\partial\Omega)$ . A weak solution to system (1.1)–(1.2) is a function  $u \in L^2(\Omega)$  such that<sup>11</sup>

$$(2.7) \quad \int_{\Omega} u f \, dv = \pm \int_{\partial\Omega} a \partial_{\nu} z \, d\sigma,$$

for every  $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , where  $z$  is the strong solution to system (2.1)–(1.2) with  $a = 0$ .

Let  $s \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$  satisfy

$$(2.8) \quad \langle s, 1 \rangle = 0.$$

A weak solution to system (1.1)–(1.4) is a function  $u \in L^2(\Omega)$  such that<sup>12</sup>

$$(2.9) \quad \int_{\Omega} u f \, dv = \mp \langle s, z \rangle,$$

for every  $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ , where  $z$  is the strong solution to system (2.1)–(1.4) with  $s = 0$ .

The following results are proved in [23].

**Lemma 2.4.** *Let  $a \in L^2(\partial\Omega)$ . Then, system (1.1)–(1.2) admits a weak solution  $u$ . Moreover,  $\partial_{\nu} u \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$  and*

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \|a\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ \|\partial_{\nu} u\|_{W^{-1,2}(\partial\Omega)} &\leq c \|a\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

<sup>11</sup>It must be chosen the sign plus [resp. minus] if  $\Omega$  is bounded [resp. exterior].

<sup>12</sup>See footnote 2.

**Lemma 2.5.** *Let  $\Omega$  be bounded and let  $s \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$  satisfy (2.8) if  $\alpha = 0$ . Then, system (1.1)–(1.4) admits a weak solution  $u$ . Moreover,*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c\|s\|_{W^{-1,2}(\partial\Omega)}$$

if  $\alpha \neq 0$ , and

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|s\|_{W^{-1,2}(\partial\Omega)},$$

if  $\alpha = 0$  and  $u$  has zero integral mean on  $\Omega$ .

Of course, the weak solution is unique<sup>13</sup> if  $\Omega$  is bounded (modulo a constant in the Neumann problem). If  $\Omega$  is exterior the condition at infinity ensuring uniqueness are the same as in the variational formulation.

### 3 Layer potentials with densities in Sobolev's spaces

Let  $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$ . The double layer potential with a density  $\varphi$  is the function in  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$  defined by

$$w(\varphi)(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu U(x - \zeta) \varphi(\zeta) d\sigma_\zeta,$$

where

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |t|, & n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_n} |t|^{2-n}, & n > 2, \end{cases}$$

and  $\omega_n$  is the measure of the surface of the unit ball in  $\mathbb{R}^n$ .

Let  $\psi \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ . The simple layer potential with a density  $\psi$  is the function in  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$  defined by

$$v(\psi)(x) = -\langle \psi, U(x - \xi) \rangle.$$

Of course,  $w(\varphi)$  and  $v(\psi)$  are  $C^\infty$  solutions to equation (1.1) in  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ .

Set

$$\hat{\Omega} = \begin{cases} \Omega, & \text{if } \Omega \text{ is bounded,} \\ \Omega' = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, & \text{if } \Omega \text{ is exterior.} \end{cases}$$

---

<sup>13</sup>Uniqueness is here understood in the class of all weak solutions.

and, assuming that  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , let  $\mathbf{h} \in L^2_{\text{div}}(\Omega)$  be a vector field in  $\Omega$  such that  $\hat{\gamma}(\mathbf{h}) = \psi$ . In virtue of Lemma 2.3 the simple layer potential  $v(\psi)$  can be written

$$v(\psi)(x) = - \int_{\hat{\Omega}} \mathbf{h}(y) \cdot \nabla_y U(x-y) dv_y - \int_{\hat{\Omega}} U(x-y) \operatorname{div} \mathbf{h}(y) dv_y.$$

Of course, since<sup>14</sup>  $v(\psi) \in W^{1,2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , for  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ ,

$$(3.1) \quad v(\psi)_{(i)} = v(\psi)_{(e)} \in W^{1/2,2}(\partial\Omega).$$

Let  $\tilde{\varphi} \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  be an extension of  $\varphi$  in  $\hat{\Omega}$  [11]. In virtue of the divergence theorem, we have that

$$w(\varphi)(x) = \begin{cases} \int_{\hat{\Omega} \setminus S_\epsilon(x)} \nabla_y U(x-y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S_\epsilon(x)} \frac{\tilde{\varphi}(y)}{|x-y|^{n-1}} d\sigma_y, & x \in \hat{\Omega} \\ \int_{\hat{\Omega}} \nabla_y U(x-y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\hat{\Omega}}, \end{cases}$$

where  $S_\epsilon(x)$  is contained in  $\hat{\Omega}$  [resp. in  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\hat{\Omega}}$ ] if  $x \in \hat{\Omega}$  [resp.  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\hat{\Omega}}$ ]. Hence, letting  $\epsilon \rightarrow 0$ , it follows that

$$(3.2) \quad w(\varphi)(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x) + \int_{\hat{\Omega}} \nabla_y U(x-y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y, & x \in \hat{\Omega} \\ \int_{\hat{\Omega}} \nabla_y U(x-y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\hat{\Omega}}. \end{cases}$$

Setting

$$\mathcal{L}[\tilde{\varphi}](x) = - \int_{\hat{\Omega}}^* \nabla_x \nabla_x U(x-y) \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y,$$

where the integral is understood as Cauchy principal value, in virtue of a classical result (cf., e.g., [22], p. 585), from (3.2) we have that

$$(3.3) \quad \nabla w(\varphi)(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{n} \nabla \tilde{\varphi}(x) + \mathcal{L}[\tilde{\varphi}](x), & x \in \hat{\Omega}, \\ \mathcal{L}[\tilde{\varphi}](x), & x \notin \hat{\Omega}. \end{cases}$$

<sup>14</sup>As is usual, if  $V(\Omega)$  denotes a space of functions on  $\Omega$ , by  $V_{\text{loc}}(\Omega)$  we mean the set of all functions that belong to  $V(A)$  for every bounded open set  $A$  contained in  $\Omega$ .

By Calderón-Zygmund's theorem

$$(3.4) \quad \|\mathcal{L}[\tilde{\varphi}]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla \tilde{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla \tilde{\varphi}\|_{L^2(\hat{\Omega})},$$

so that  $w(\varphi) \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega})$  admits traces on  $\partial\Omega$ . Therefore, denoting by  $w(\varphi)_{(i)}$  and  $w(\varphi)_{(e)}$  the traces on  $\partial\Omega$  of the restrictions of  $w(\varphi)$  to  $\hat{\Omega}$  and  $\mathbb{R}^n \setminus \hat{\Omega}$  respectively, and setting

$$\mathcal{K}[\varphi] = \text{tr} \left[ \int_{\hat{\Omega}} \nabla_y U(x-y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y \right],$$

we have that

$$(3.5) \quad \begin{aligned} w(\varphi)_{(i)}(\xi) &= (\mathcal{I} + \mathcal{K})[\varphi](\xi) \\ w(\varphi)_{(e)}(\xi) &= \mathcal{K}[\varphi](\xi) \end{aligned}$$

for almost all  $\xi \in \partial\Omega$ . Moreover, by (3.4)

$$\|\mathcal{K}[\varphi]\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \leq c\|\varphi\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)},$$

so that the map  $\mathcal{K}$  is continuous in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ .

*Remark 3.1* - Let  $\Omega$  be bounded and let  $\varphi \in C^{0,1}(\partial\Omega)$ . Let  $\tilde{\varphi} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$  be an extension of  $\varphi$  vanishing outside a neighborhood of  $\partial\Omega$  (cf., e.g., [18], p. 51) and let  $\xi \in \partial\Omega$ . Set

$$\mathcal{K}_\epsilon[\varphi](\xi) = \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega \cap S_\epsilon(\xi)} \partial_\nu U(\xi - \zeta) \varphi(\zeta) d\sigma_\zeta.$$

Then, taking into account (3.2), we have

$$\begin{aligned} 2\mathcal{K}_\epsilon[\varphi](\xi) &= \int_{\Omega \cup S_\epsilon(\xi)} \nabla_y U(\xi - y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y + \varphi(\xi) \\ &\quad + \int_{\Omega \setminus S_\epsilon(\xi)} \nabla_y U(\xi - y) \cdot \nabla \tilde{\varphi}(y) dv_y - \int_{\partial S_\epsilon(\xi)} \partial_\nu U(\xi - \zeta) \varphi(\zeta) d\sigma_\zeta. \end{aligned}$$

Hence, letting  $\epsilon \rightarrow 0$ , it follows that

$$(3.6) \quad \mathcal{K}[\varphi](\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon[\varphi](\xi) = \frac{1}{2}\varphi(\xi) + \mathcal{K}[\varphi](\xi).$$

Therefore, since  $C^{0,1}(\partial\Omega)$  is dense in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ , the map  $\mathcal{K}$  is continuous in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  and (3.5) can be written in the classical form

$$\begin{aligned} w(\varphi)_{(i)}(\xi) &= \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}\right)[\varphi](\xi) \\ w(\varphi)_{(e)}(\xi) &= \left(-\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}\right)[\varphi](\xi). \end{aligned}$$

for almost all  $\xi \in \partial\Omega$ .

It is worth noting that the map  $\mathcal{K}$  cannot be compact even if  $\Omega$  is regular, for instance of class  $C^2$ . Indeed, in such a case the map  $\mathcal{K}$  is compact in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  (see, e.g., [17]) so that if  $\mathcal{K}$  were compact in this space, the identity should be compact in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Since this is absurd, we conclude that  $\mathcal{K}$  cannot be compact.  $\diamond$

The following lemma<sup>15</sup> generalizes a well-known result of Liapounov-Tauber in classical potential theory to the double layer potential we consider.

**Lemma 3.1.** *Let  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then  $\partial_\nu w_{(i)}(\varphi), \partial_\nu w_{(e)}(\varphi) \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  and*

$$(3.7) \quad \partial_\nu w(\varphi)_{(i)} = \partial_\nu w(\varphi)_{(e)}$$

PROOF - The first part of the lemma follows trivially from Lemma 2.3. To prove (3.7), we note that by (2.6)

$$\begin{aligned} (\partial_\nu w_{(e)}(\varphi) - \partial_\nu w_{(i)}(\varphi), \zeta) &= \int_\Omega \nabla w(\varphi) \cdot \nabla \tilde{\zeta} \, dv + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \nabla w(\varphi) \cdot \nabla \tilde{\zeta} \, dv \\ &= \int_\Omega \nabla \tilde{\zeta} \cdot \nabla \tilde{\varphi} \, dv + \int_\Omega \nabla \tilde{\varphi}(x) \cdot \left\{ \nabla_x \int_{\mathbb{R}^n} \nabla U(x-y) \nabla \tilde{\zeta}(y) \, dv_y \right\} dv_x = 0, \end{aligned}$$

for every  $\zeta \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Hence (3.7) follows at once.  $\square$

As is customary, Kern  $\mathcal{Q}$  will denote the kernel of a linear and continuous operator  $\mathcal{Q} : S \rightarrow S'$ , with  $S$  and  $S'$  Banach spaces. Also, the operator  $\mathcal{Q}$  will be said to be *fredholmian* if  $\mathcal{Q}$  has a closed range and  $\dim \text{Kern } \mathcal{Q} = \dim \text{Kern } \mathcal{Q}^* < +\infty$ , where  $\mathcal{Q}^*$  denotes the adjoint operator of  $\mathcal{Q}$ .

**Lemma 3.2.** *The map  $\mathcal{K} \in \mathcal{I} + \mathcal{K}$  have closed range. Moreover*

$$(3.8) \quad \dim \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \begin{cases} m, & \Omega \text{ bounded,} \\ 0, & \Omega \text{ exterior,} \end{cases}$$

$$(3.9) \quad \dim \text{Kern } \mathcal{K} = \begin{cases} 1, & \Omega \text{ bounded,} \\ m, & \Omega \text{ exterior.} \end{cases}$$

If  $\Omega$  is exterior, a basis of  $\text{Kern } \mathcal{K}$  is given by the functions

$$(3.10) \quad \varphi_i(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \partial\Omega_i, \\ 0, & \xi \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

<sup>15</sup>See also [4]

If  $\Omega$  is bounded a basis of Kern  $\mathcal{K}$  is given by a constant function on  $\partial\Omega$  and a basis of  $\mathcal{I} + \mathcal{K}$  by the functions (3.10)

PROOF - Let us prove the Lemma for  $\Omega$  exterior. The proof for  $\Omega$  bounded is obtained by a quite analogous argument. By (2.3), (2.4), (3.5), (3.7) and well-known interior estimates we have

$$\begin{aligned}
 \|(\mathcal{I} + \mathcal{K})[\varphi]\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} &= \|w_{(i)}(\varphi)\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \leq c\|w(\varphi)\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
 &\leq c\{\|\partial_\nu w(\varphi)_{(i)}\|_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(\hat{\Omega})}\} = c\{\|\partial_\nu w(\varphi)_{(e)}\|_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega)} \\
 &\quad + \|w(\varphi)\|_{L^2(\hat{\Omega})}\} \leq c\{\|w(\varphi)\|_{W^{1,2}(S_R \setminus \Omega')} + \|w(\varphi)\|_{L^2(\hat{\Omega})}\} \\
 &\leq c\{\|w_{(e)}(\varphi)\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(\hat{\Omega})}\} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)} \\
 &= c\{\|\mathcal{K}[\varphi]\|_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(\hat{\Omega})} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)}\} \\
 \|\mathcal{K}[\varphi]\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} &= \|w_{(e)}(\varphi)\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \leq c\|w(\varphi)\|_{W^{1,2}(S_R \setminus \Omega')} \\
 &\leq c\{\|\partial_\nu w(\varphi)_{(i)}\|_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)}\} \\
 &\leq c\{\|w_{(i)}(\varphi)\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)}\} \\
 &= c\{\|(\mathcal{I} + \mathcal{K})[\varphi]\|_{W^{1/2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)}\}
 \end{aligned}$$

with  $S_R \supset \Omega'$ . Hence

$$\begin{aligned}
 \|\varphi\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} &= \|(\mathcal{I} + \mathcal{K})[\varphi] - \mathcal{K}[\varphi]\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \\
 &\leq c\{\|(\mathcal{I} + \mathcal{K})[\varphi]\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(\hat{\Omega})} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)}\} \\
 \|\varphi\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} &\leq c\{\|\mathcal{K}[\varphi]\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} + \|w(\varphi)\|_{L^2(T_R)}\}.
 \end{aligned}$$

Since the maps  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega) \rightarrow w(\varphi) \in L^2(T_R)$ ,  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega) \rightarrow w(\varphi) \in L^2(\Omega)$  are compact, a classical result (cf. [22], p. 618) assures that  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}$  have closed range and  $\dim \text{Kern } \mathcal{K}, \dim \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}) < +\infty$ .

If  $\varphi \in \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K})$ , then  $w(\varphi) = 0$  in  $\overline{\Omega'}$  and by (3.7)  $\partial_\nu w(\varphi)_{(e)} = 0$  so that in virtue of the uniqueness of the Neumann problem  $w(\varphi) = 0$  in  $\overline{\Omega}$ . Hence  $\varphi = w(\varphi)_{(e)} - w(\varphi)_{(i)} = 0$  and (3.8)<sub>2</sub> is proved. If  $\varphi \in \text{Kern } \mathcal{K}$ , then  $w(\varphi) = 0$  in  $\overline{\Omega}$  and  $\partial_\nu w(\varphi)_{(i)} = 0$  so that  $\varphi$  is constant on every  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . On the other hand, the constants belong to  $\text{Kern } \mathcal{K}$  and (3.9)<sub>2</sub> is proved.  $\square$

The following lemma is perhaps well-known. We give a simple proof of it for the sake of completeness.

**Lemma 3.3.** *Let  $\Omega$  be an exterior domain and let  $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$  be a harmonic function such that*

$$(3.11) \quad u = o(r^{k+1}),$$



with  $k \in \mathbb{N}_0$ . Then there exists a harmonic polynomial  $\mathcal{P}_k$  of at most degree  $k$  such that

$$u(x) = -v(\partial_\nu u) - w(u)(x) + \mathcal{P}_k(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

PROOF - Let  $\eta \in C^{k+1}(\mathbb{R})$  be such that  $\eta = 1$  in  $[1, +\infty)$  and  $\eta = 0$  in  $(-\infty, 1]$ . Of course, the function  $g(|x - y|) = \eta(R^{-1}(2R - |x - y|))$  is of class  $C^{k+1}$  in  $\mathbb{R}^n$ , vanishes outside  $S_{2R}(x)$  and is equal to 1 in  $S_R(x) \supset \Omega'$ . Moreover,  $|D_y^j g(|x - y|)| \leq cR^{-j}$ , with  $c$  independent of  $R$ . Then, writing the Stokes formula for the equation  $\Delta(gu) = 2 \operatorname{div}(u \nabla g) - u \Delta g$ , we get

$$u(x) = -v(\partial_\nu u) - w(u) + H(x),$$

with

$$H(x) = - \int_{\Omega} \left[ U(x - y) \Delta g(|x - y|) + \frac{2(x - y) \cdot \nabla g(|x - y|)}{\omega_n |x - y|^n} \right] u(y) dv_y.$$

The  $H(x)$  is of class  $C^{k+1}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Moreover, by the properties of the functions  $g$  and  $U$  we have

$$|D^{k+2} H(x)| \leq c(\log R)^\alpha R^{-k-4} \int_{T_R(x)} |u| d\sigma$$

where  $\alpha = 1$  for  $n = 2$  and  $\alpha = 0$  for  $n > 2$ . Hence, taking into account that (3.11) and letting  $R \rightarrow +\infty$ , it follows that  $D^{k+2} H = 0$  in  $\mathbb{R}^2$  so that  $H(x)$  is a harmonic polynomial in  $\mathbb{R}^n$ , which in virtue of (3.11) is at most degree  $k$ .  $\square$

**Lemma 3.4.** Let  $\Omega$  be an exterior domain and let  $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$  be a harmonic function, constant on  $\partial\Omega$  and such that  $u = o(2 - n)$ . Then  $u = 0$  in  $\bar{\Omega}$ .

PROOF - An integration by parts in  $\Omega \cap S_R$  ( $S_R \supset \Omega'$ ) yields

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap S_R} (\nabla u)^2 dv &= -u|_{\partial\Omega} \langle \partial_\nu u, 1 \rangle + \int_{\partial S_R} u \partial_r u d\sigma \\ \langle \partial_\nu u, 1 \rangle &= \int_{\partial S_R} \partial_r u d\sigma \end{aligned}$$

Hence the desired results follows by letting  $R \rightarrow +\infty$  and taking into account Lemma 3.3.  $\square$

**Lemma 3.5.** Let  $\Omega$  be an exterior domain and let  $w(\varphi)$  be a double layer potential with a density  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . If  $w(\varphi)$  is constant on every  $\partial\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) and vanishes on  $\partial\Omega_0$  for  $\Omega$  bounded, then  $w(\varphi)$  vanishes in  $\bar{\Omega}$ .

PROOF - Let  $\Omega$  be exterior. Since  $w(\varphi)$  is harmonic in every  $\Omega_j$ , we have

$$\langle \partial_\nu w(\varphi)_{(e)}, 1 \rangle_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega_i)} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

so that by (3.7) and the behavior at infinity of  $w(\varphi)$

$$\int_{\Omega} [\nabla w(\varphi)]^2 dv = 0$$

and  $w(\varphi)$  is zero in  $\overline{\Omega}$ . If  $\Omega$  is bounded, then an integration by parts yields

$$(3.12) \quad \int_{\Omega} [\nabla w(\varphi)]^2 dv = \sum_{i=1}^m c_i \langle \partial_\nu w(\varphi), 1 \rangle_{W^{-1/2,2}(\partial\Omega_i)}$$

Hence the desired result follows by repeating the above steps and taking into account that  $w(\varphi)$  vanishes on  $\partial\Omega_0$   $\square$

Let  $\mathcal{K}^*$  denote the adjoint operator of  $\mathcal{K}$ . Of course  $\mathcal{K}^*, \mathcal{I} + \mathcal{K}^*$  are continuous and have closed range in  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ .

**Lemma 3.6.**

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \partial_\nu v(\psi)_{(i)} &= -\mathcal{K}^*[\psi], \\ \partial_\nu v(\psi)_{(e)} &= -(\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)[\psi] \end{aligned}$$

and

$$(3.14) \quad \dim \text{Kern } \mathcal{K}^* = \begin{cases} 1, & \Omega \text{ bounded,} \\ m, & \Omega \text{ exterior,} \end{cases}$$

$$(3.15) \quad \dim \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*) = \begin{cases} m, & \Omega \text{ bounded,} \\ 0, & \Omega \text{ exterior.} \end{cases}$$

If  $\Omega$  is exterior, there exists a basis  $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,m}$  of  $\text{Kern } \mathcal{K}^*$  such that

$$(3.16) \quad v(\psi_1)|_{\overline{\Omega}} = c = \text{const.}, \quad \int_{\partial\Omega} \psi_1 d\sigma \neq 0, \quad \int_{\partial\Omega} \psi_j d\sigma = 0, \quad j = 2, \dots, m$$

If  $\Omega$  is bounded a basis of  $\text{Kern } \mathcal{K}^*$  is given by a function  $\psi$  such that  $v(\psi)$  is constant in  $\Omega_0$  and a basis of  $\mathcal{I} + \mathcal{K}^*$  by the  $m$  function  $\psi_i$  such that

$$v(\psi_i)(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \partial\Omega_i, \\ 0, & \xi \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m..$$

PROOF - Let  $\Omega$  be exterior. Then, a simple calculation yields

$$\langle \partial_\nu v(\psi)_{(i)}, \varphi \rangle = \int_{\Omega'} \mathbf{h} \cdot \nabla [w(\varphi) - \bar{\varphi}] dv = \langle \psi, \varphi - w(\varphi)_{(i)} \rangle = -\langle \psi, \mathcal{K}[\varphi] \rangle,$$

for every  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Hence (3.13)<sub>1</sub> follows at once<sup>16</sup>. The proof of (3.13)<sub>1</sub> for  $\Omega$  bounded and of (3.13)<sub>2</sub> is achieved by repeating the same argument.

Let us note that  $\text{Kern } \mathcal{K}^*, \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*) \subset L^2(\partial\Omega)$ . Indeed, if  $\Omega$  is exterior and  $\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^*$ , then  $\partial_\nu v(\psi)_{(i)} = 0$  and  $v(\psi)$  is constant on  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , so that by Lemma 2.1  $\partial_\nu v(\psi)_{(e)}$ , and as a consequence,  $\psi$  belongs to  $L^2(\partial\Omega)$ . The proof in the remaining cases are quite analogous.

Let us pass to prove (3.14), (3.15) by first assuming  $\Omega$  exterior. We affirm that the equation

$$(3.17) \quad \mathcal{K}^*[\varphi] = 0$$

admits a solution  $\psi_i \in L^2(\partial\Omega)$  such that

$$(3.18) \quad \int_{\partial\Omega_j} \psi_i d\sigma = \delta_{ij}.$$

Indeed, if such a solution do not exist, then, setting

$$(3.19) \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{on } \partial\Omega_i, \\ 0, & \text{on } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_i, \end{cases}$$

we should have that  $\alpha\psi_{\partial\Omega} = 0$ , for every solution to (3.17). Therefore, since  $\mathcal{I} + \mathcal{K}^*$  is continuous and have a closed range, there should exist a double layer potential  $w(\varphi)$ , with  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  such that  $w(\varphi) = \alpha$  on  $\partial\Omega$ . Since this is absurd because of Lemma 3.5, we conclude that there exists a solution  $\psi_i$  to equation (3.17) which satisfies (3.18). The system  $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,m}$  is linearly independent. Indeed, if  $\beta_i\psi_i = 0$ , then  $\alpha\beta_i(\psi_i)_{\partial\Omega} = \beta_i = 0$ , where  $\alpha$  is expressed by (3.19). Set  $\mathcal{V} = \{v(\psi_i)|_{\overline{\Omega'}}\}_{i=1,\dots,m}$ . If  $n > 2$ , then  $\dim \mathcal{V} = m$ . Indeed, if  $\beta_i v(\psi_i)|_{\overline{\Omega'}} = 0$ , then  $v(\beta_i\psi_i)|_{\overline{\Omega'}} = 0$  and, in virtue of the uniqueness theorem about the Dirichlet problem in exterior domains, we have that  $v(\beta_i\psi_i) = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Hence by (3.13) it follows that  $\beta_i\psi_i = 0$  and by the linear independence of  $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,m}$  that  $\beta_i = 0$ . Therefore, any function  $v(\psi)$ , with  $\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^*$  is expressed by  $v(\psi) = \beta_i v(\psi_i)$  in  $\overline{\Omega'}$  so that  $v(\psi - \beta_i\psi_i) = 0$  in  $\overline{\Omega'}$ . Hence, by appealing once again to the uniqueness theorem we see that  $\psi = \beta_i\psi_i$  so that the system  $\{\psi_i\}_{i=1,\dots,m}$  is a basis of  $\text{Kern } \mathcal{K}^*$ . If  $n = 2$ , then

<sup>16</sup>Relation (3.6) is proved also in [4]

$m - 1 \leq \dim \mathcal{V} \leq m$ . Indeed, let  $\dim \mathcal{V} = m - k$  and assume, for instance, that the system  $\{v(\psi_i)|_{\overline{\Omega'}}\}_{j=k+1, \dots, m}$  is linearly independent. Then, we have

$$v(\psi_i) = \sum_{j=k+1}^m A_{ij} v(\psi_j), \quad i = 1, \dots, k.$$

Let

$$v_i = \begin{cases} v(\psi_i) - \sum_{j=k+1}^m A_{ij} v(\psi_j), & i = 1, \dots, k, \\ v(\psi_i), & i = k + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Of course,

$$v_i = \sum_{j=1}^m B_{ij} v(\psi_j),$$

with

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & -A_{ij} \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix}.$$

Therefore, setting  $\psi'_i = \sum_{j=1}^m B_{ij} \psi_j$  and taking into account that  $\det[B_{ij}] = 1$ , we see that the system  $\{\psi'_i\}_{i=1, \dots, m}$  is linearly independent and  $v(\psi'_i)|_{\overline{\Omega'}} = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Note that  $(\psi'_i)_{\partial\Omega} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Indeed, If  $(\psi'_i)_{\partial\Omega} = 0$ , by Lemma 3.4, we should have  $v(\psi'_i) = 0$  in  $\mathbb{R}^n$  and so the *absurdum*  $\psi'_i = 0$ . On the other hand,  $k$  must be less than or equal to 1. Indeed if  $k > 1$ , then we can always find a linear combination  $\beta_i (\psi'_i)_{\partial\Omega} = 0$ , with not zero scalars  $\beta_i$ . Hence, taking into account Lemma 3.4 again, we should have the *absurdum*  $\beta_i \psi'_i = 0$ . From the above argument it follows that we can always construct a linearly independent system  $\{\psi_i^*\}_{i=1, \dots, m}$  in such a way that  $v(\psi_1^*)$  is constant in  $\overline{\Omega'}$  (zero if  $\dim \mathcal{V} = m - 1$ ),  $(\psi_1^*)_{\partial\Omega} \neq 0$  and  $(\psi_i^*)_{\partial\Omega} = 0$ ,  $i = 2, \dots, m$ . The system  $\{\psi_i^*\}_{i=1, \dots, m}$  is a basis of  $\text{Kern } \mathcal{K}^*$ . Indeed, assume, per *absurdum*, that there exists  $\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^*$  such that the system  $\{\psi, \psi_i^*\}_{i=1, \dots, m}$  is linearly independent so that

$$(3.20) \quad \beta \psi + \beta_i \psi_i^* = 0 \Rightarrow \beta = \beta_i = 0$$

Since  $v(\psi)$  cannot be constant in  $\overline{\Omega'}$ , otherwise by Lemma 3.4 should depend linearly on  $\psi_1^*$ , the system  $\{\mathcal{V}, v(\psi)\}$  must be linearly dependent. On the other hand, from (3.20)

$$\beta v(\psi) + \beta_i v(\psi_i^*) = 0 \Rightarrow \beta = \beta_i = 0$$

Since this contradicts the linear dependence of  $\{\mathcal{V}, v(\psi)\}$ , we conclude that  $\dim \text{Kern } \mathcal{K}^* = m$ .

If  $\Omega$  is bounded and  $\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^*$ , then  $v(\psi)$  is constant in  $\Omega$  and, as a consequence in  $\Omega_0$ . On the other hand, by what we said above, there exists a unique density  $\psi$  on  $\partial\Omega_0$  such that  $(U(x - \xi)\psi)_{\partial\Omega_0}$  is constant on  $\Omega_0$ . Hence the density equal to  $\psi$  on  $\Omega_0$  and zero on  $\partial\Omega \setminus \partial\Omega_0$  is the unique linearly independent element of  $\text{Kern } \mathcal{K}^*$  and  $(3.14)_1$  is proved.

Let  $\psi \in \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)$ . If  $\Omega$  is bounded, then  $v(\psi)$  is constant in every  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  and, since  $\psi_{\partial\Omega} = 0$ ,  $v(\psi) = 0$  in  $\mathbb{C}\Omega_0$ . Proceeding as we made in the proof of  $(3.14)_2$  from  $(3.17)$  on and by making use of Lemma 3.5, we construct a linearly independent system  $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, m}$  satisfying  $(3.18)$ , which, taking into account that the system  $\{v(\psi_i)\}_{i=1, \dots, m}$  is linearly independent, results to be a basis of  $\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)$ . If  $\Omega$  is exterior, then  $v(\psi) = 0$  in  $\Omega$  so that  $v(\psi) = 0$  in  $\mathbb{R}^n$  and  $(3.15)$  is proved.  $\square$

The following result is an immediate consequence of Lemmas 3.2 and 3.6.

**Corollary 3.1.** *The operators  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}$  are fredholmian.*

*Remark 3.2* - In view of  $(3.16)$  if  $\Omega$  exterior the space  $\text{Kern } \mathcal{K}^*$  admits the following decomposition

$$\text{Kern } \mathcal{K}^* = \mathcal{C} \oplus \mathcal{R}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^* : v(\psi)|_{\overline{\Omega}} = \text{constant}\}, \\ \mathcal{R} &= \{\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^* : \psi_{\partial\Omega} = 0\} \end{aligned}$$

For future purpose we denote by  $\psi_\ell$  the element of  $\mathcal{C}$  such that  $(\psi_\ell)_{\partial\Omega} = 1$ . As is well-known, for  $n = 2$  the number

$$(3.21) \quad \lambda_c(\Omega) = \exp[-v(\psi_\ell)], \quad \psi \in \mathcal{C}$$

is the *logarithmic capacity* of  $\Omega$ .  $\diamond$

*Remark 3.3* - Taking into account Remark 3.1 the jump condition  $(3.6)$  can be written in the classical form

$$\begin{aligned} \partial_\nu v(\psi)_{(i)} &= (\tfrac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^*)[\varphi](\xi), \\ \partial_\nu v(\psi)_{(e)} &= -(\tfrac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)[\varphi](\xi) \end{aligned}$$

where  $\mathcal{K}^*$  is the adjoint map of the operator  $\mathcal{K}$  defined by  $(3.6)$ .  $\diamond$

**Lemma 3.7.** *Let  $\Omega$  be exterior and let  $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$  vanishes on  $\partial\Omega$ . If  $u = o(r)$ , then there exists  $\psi \in \mathcal{C}$  such that  $u = v(\psi) - v(\psi)|_{\partial\Omega}$ .*

PROOF - In virtue of Lemma 3.3  $u = -v(\partial_\nu u) + c$  for a suitable constant  $c$ . Let  $\psi \in \mathcal{C}$  be such that  $(\psi + \partial_\nu u)|_{\partial\Omega} = 0$ . Then by Lemma 3.4  $v(\psi) = -v(\partial_\nu u)$  and the lemma is proved.  $\square$

An immediate consequence of Lemma 3.7 is that the Dirichlet problem in an exterior domain has at most one variational solution in the function class  $\{u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) : u = o(r)\}$  modulo a harmonic function  $v(\psi) - v(\psi)|_{\partial\Omega}$ , with  $\psi \in \mathcal{C}$ .

## 4 Existence theorems with data in Sobolev's spaces

In virtue of the results of the foregoing section the maps  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}$  are fredholmian. This allow us to use well-known techniques of classical potential theory to prove the following theorems.

**Theorem 4.1.** *Let  $\Omega$  be bounded and let  $a \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then the variational solution to the Dirichlet problem is expressed by  $w(\varphi) + v(\psi)$ , with  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)/\text{Kern}(\mathcal{I} + \mathcal{K})$  and  $\psi \in \text{Kern}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)$ , uniquely determined by  $a$ .*

**Theorem 4.2.** *Let  $\Omega$  be exterior and let  $a \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then the variational solution to the Dirichlet problem is expressed by  $w(\varphi) + v(\psi) + \kappa$ , with*

$$(4.1) \quad \kappa = \int_{\partial\Omega} a \psi_\ell \, d\sigma$$

and  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)/\text{Kern} \mathcal{K}$  and  $\psi \in \mathcal{R}$  uniquely determined by  $a$ .

**Theorem 4.3.** *Let  $\Omega$  be exterior, with  $\lambda_c(\Omega) \neq 1$  if  $n = 2$ , and let  $a \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then the variational solution to the Dirichlet problem is expressed by  $w(\varphi) + v(\psi)$ , with  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)/\text{Kern} \mathcal{K}$  and  $\psi \in \text{Kern} \mathcal{K}^*$  uniquely determined by  $a$ .*

**Theorem 4.4.** *Let  $\Omega$  be bounded and let  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  satisfy (2.8). Then the variational solution to the Neumann problem is expressed by a simple layer potential  $v(\psi)$ , with  $\psi \in W_{\text{Kern} \mathcal{K}^*}^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , uniquely determined by  $s$ .*

**Theorem 4.5.** *Let  $\Omega$  be exterior and let  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then the variational solution to the Neumann problem is expressed by a simple layer potential  $v(\psi)$ , with  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , uniquely determined by  $s$ .*

**Theorem 4.6.** *Let  $\Omega$  be bounded and let  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then, if either  $n > 2$  or  $n = 2$  and  $\lambda_c(\Omega_0) \neq 1$ , then the variational solution to the Robin problem is expressed by a simple layer potential  $v(\psi)$ , with  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , uniquely determined by  $s$ . If  $n = 2$  and  $\lambda_c(\Omega_0) = 1$ , then it is given by  $v(\psi) + \kappa$ , with  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)/\mathbb{C}$  and  $\kappa \in \mathbb{R}$  determined by*

$$\langle s - \alpha\kappa, \varphi \rangle = 0, \quad \varphi \in \text{Kern}(\alpha\nu + \mathcal{K}).$$

**Theorem 4.7.** *Let  $\Omega$  be an exterior domain of  $\mathbb{R}^n$ , with  $n > 2$ , and let  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ . Then the variational solution to the Robin problem is expressed by a simple layer potential  $v(\psi)$ , with  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , uniquely determined by  $s$ .*

PROOF OF THEOREM 4.1 – A solution in the form  $w(\varphi) + v(\psi)$  exists if and only if

$$\int_{\partial\Omega} [a - v(\psi)]\psi' d\sigma = 0, \quad \forall \psi \in \text{Kern}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^*),$$

or, what is the same, if and only if the equation

$$(4.2) \quad \int_{\partial\Omega} v(\psi)\psi' d\sigma = 0, \quad \forall \psi' \in \text{Kern}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^*),$$

admits only the null solution  $\psi = 0$ . Choosing  $\psi' = \psi$  in (4.2), an integration by parts yields

$$(4.3) \quad \int_{\Omega} [\nabla v(\psi)]^2 dv = \int_{\partial\Omega} v(\psi)\psi d\sigma = 0.$$

Hence it follows at once that  $\psi = 0$ . □

PROOF OF THEOREM 4.2 – A solution in the form  $w(\varphi) + v(\psi) + h$  exists if and only if the equation

$$(4.4) \quad \int_{\partial\Omega} [v(\psi) + h]\psi' d\sigma = 0, \quad \forall \psi' \in \text{Kern } \mathcal{K}^*,$$

admits only the null solution  $\psi = 0$  and  $h = 0$ . Since<sup>17</sup>  $\psi \in \mathcal{R}$  choosing first  $\psi' = \psi$  in (4.4) yields (4.3) whence it follows that  $\psi = 0$ . Then, choosing  $\psi' = \psi_\ell$ , we see at once that  $h = 0$ . □

---

<sup>17</sup>see remark 3.2.

The proof of Theorems 4.3 is quite analogous to that of Theorem 4.2. The proof of Theorems 4.4 and 4.5 are obvious.

**PROOF OF THEOREM 4.6** – Looking for a solution to Robin's problem in the form of a simple layer potential, we have to solve the integral equation in  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$

$$\alpha v(\psi) - \mathcal{K}^*[\psi] = s$$

Since  $v(\psi)$  is compact as linear and continuous operator from  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  into  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , by a well-known result (cf., e.g., [22] p. 646), the map  $(\alpha v - \mathcal{K}^*)[\psi]$  is fredholmian. If  $\psi \in \text{Kern}(\alpha v - \mathcal{K}^*)$ , then an integration by parts yields

$$\int_{\Omega} [\nabla v(\psi)]^2 dv + \alpha \int_{\partial\Omega} v(\psi)^2 dv = 0.$$

Hence it follows that  $v(\psi) = 0$  in  $\overline{\Omega}$ . If either  $n > 2$  or  $n = 2$  and  $\lambda_c(\Omega_0) \neq 1$ , then  $\psi = 0$  and the theorem is proved. If  $n = 2$  and  $\lambda_c(\Omega_0) = 1$ , then  $\text{Kern}(\alpha v - \mathcal{K}^*) = \mathcal{C}$ . Moreover, if  $\varphi \in \text{Kern}(\alpha v - \mathcal{K})$ , then  $\varphi_{\partial\Omega} \neq 0$ . Indeed, if  $\varphi_{\partial\Omega} = 0$ , then  $u = \alpha v(\varphi) - w(\varphi)$  is a harmonic function in  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$  vanishing on  $\partial\Omega$  and at infinity so that  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ ,  $u_{(i)} = -\varphi$ ,  $(\partial_\nu u)_{(i)} = \varphi$ . Hence it follows that

$$\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dv + \int_{\partial\Omega} \varphi^2 d\sigma = 0$$

and so the *absurdum*  $\varphi = 0$ . Taking into account the above remarks, we see that a solution to system (1.1)–(1.4) in the form  $v(\psi) + \kappa$  exists if and only if  $\langle s - \alpha k, \varphi \rangle = 0$ , i.e., if we choose  $\kappa = \alpha^{-1} \langle s, \varphi \rangle$ .  $\square$

The proof of Theorem 4.7 is obvious.

A simple consequence of Lemma 3.7 is the following sharp uniqueness theorem.

**Theorem 4.8.** *Let  $\Omega$  be exterior. Then the solutions to the Dirichlet problem in Theorems 4.2, 4.3 are unique in the class  $\{u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega) : u = o(r)\}$  to within a harmonic function  $v(\psi) - v(\psi)|_{\partial\Omega}$ , with  $\psi \in \mathcal{C}$ .*

**Remark 4.1** – From Theorem 4.2 it follows that a solution  $u$  to the Dirichlet problem in an exterior domain such that  $u - \kappa = O(r^{1-n})$ , with  $k$  assigned constant, exists if and only if compatibility condition (4.1) is satisfied. In particular, a solution to the Dirichlet problem in a plane exterior domain vanishing



at infinity exists if and only if

$$(4.5) \quad \int_{\partial\Omega} a\psi_\ell d\sigma = 0.$$

◇

Set

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (\mathcal{K}^*)^{-1}[L^2_{\perp \text{Kern } \mathcal{K}}(\partial\Omega)], & \mathcal{S}' &= (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)^{-1}[L^2_{\perp \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K})}(\partial\Omega)], \\ \mathcal{T} &= \mathcal{K}^{-1}[W^{1,2}_{\perp \text{Kern } \mathcal{K}^*}(\partial\Omega)], & \mathcal{T}' &= (\mathcal{I} + \mathcal{K})^{-1}[W^{1,2}_{\perp \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)}(\partial\Omega)] \end{aligned}$$

and denote by  $\mathcal{K}_0^*$  and  $\mathcal{K}_1$  the restrictions of  $\mathcal{K}^*$  and  $\mathcal{K}$  to  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{T}$  respectively. Of course  $\text{Kern } \mathcal{K}_1 = \text{Kern } \mathcal{K}$  and  $\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_1) = \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K})$ . Also  $\text{Kern } \mathcal{K}^* = \text{Kern } \mathcal{K}_0^*$  and  $\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*) = \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*)$ <sup>18</sup>

**Lemma 4.1.** *The maps  $\mathcal{K}_0^*$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*$  are closed and  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subset L^2(\partial\Omega)$ .*

PROOF - Let  $s \in L^2(\partial\Omega)$  and let  $\Omega$  be, for instance, exterior. Then by Theorem 4.5 there exists a unique  $\psi \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  such that  $\partial_\nu v(\psi)_{(i)} = -\mathcal{K}^*[\psi] = s$ . In virtue of Lemma 2.2  $v(\psi)_{(i)} \in W^{1,2}(\partial\Omega)$  so that by (3.1)  $v(\psi)_{(e)} \in W^{1,2}(\partial\Omega)$  and by Lemma 2.1  $\partial_\nu v(\psi)_{(e)} = (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)[\psi] \in L^2(\partial\Omega)$ . Therefore, since  $\partial_\nu v(\psi)_{(e)} - \partial_\nu v(\psi)_{(i)} = \psi \in L^2(\partial\Omega)$ , we have that  $\mathcal{S} \subset L^2(\partial\Omega)$ . Analogously, we prove that  $\mathcal{S}' \in L^2(\partial\Omega)$ . To show that  $\mathcal{K}^*$  is closed, let  $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  be a sequence in  $\mathcal{S}$  such that  $\psi_k$  and  $\mathcal{K}^*[\psi_k]$  converge in  $L^2$  to  $\psi \in \mathcal{S}$  and  $\chi \in L^2(\partial\Omega)$  respectively. Since  $\mathcal{K}^*[\psi_k]$  must converge to  $\mathcal{K}^*[\psi]$  in  $W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$ , we have that  $\chi = \mathcal{K}^*[\psi]$  and so the desired result. The proof that  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*$  is closed is now evident. □

**Lemma 4.2.** *The maps  $\mathcal{K}_1$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1$  are closed and  $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \subset W^{1,2}(\partial\Omega)$ .*

PROOF - Let us prove the Lemma for the operator  $\mathcal{K}_1$  and  $\Omega$  exterior. The proof of the remaining case are quite analogous. For every  $a \in W^{1,2}_{\perp \text{Kern } \mathcal{K}^*}(\partial\Omega)$  there exists a unique  $\varphi \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  modulo an element of  $\text{Kern } \mathcal{K}_1$  such that  $\mathcal{K}[\varphi] = a$ . By Lemma 2.1  $\partial_\nu w(\varphi)_{(e)} \in L^2(\partial\Omega)$  so that by (3.7)  $\partial_\nu w(\varphi)_{(i)} \in L^2(\partial\Omega)$ . Hence, taking into account Lemma 2.2 and (3.5) it follows that  $\varphi \in W^{1,2}(\partial\Omega)$ . Finally, we can prove that  $\mathcal{K}_1$  is closed by following the argument outlined in the above Lemma. □

In virtue of the above Lemmas, the solution to the Dirichlet problem with data in  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  can be expressed by double layer potentials with densities in  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  and the solution to the Neumann and Robin problems with data in  $L^2(\partial\Omega)$  by simple layer potential with densities in  $L^2(\partial\Omega)$ .

<sup>18</sup>This is proved in Lemma 3.6 before 3.17.

## 5 Existence theorems with data in Lebesgue's spaces

The hypotheses made on the existence theorems proved in the foregoing section seem to be very weak in the Neumann, Robin problems and general enough in the Dirichlet problem. Nevertheless, as far as the Neumann problem is concerned, it must be observed that the boundary condition  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\Omega)$  is so evanescent that, thanks to a counter-example by L. De Vito [7], we can construct a (nonzero) harmonic function  $u$  in the unit disk  $\mathcal{B}$  which belongs to  $W^{1,2}(\mathcal{B})$  and whose normal derivative converges to zero almost everywhere on  $\partial\mathcal{B}$ . Then  $u$  has nonzero normal derivative  $s \in W^{-1/2,2}(\partial\mathcal{B})$  and is a variational solution to the Neumann problem corresponding to  $s$ ; nevertheless, its "real" normal derivative vanishes almost everywhere on  $\partial\Omega$ !<sup>19</sup> Moreover, as far as the Dirichlet problem is concerned, let us note that the condition  $a \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  is certainly satisfied if  $a \in C^{0,\mu}(\partial\Omega)$ , with  $\mu > 1/2$ , as first shown by C. Miranda [20], but not by "a little less regular functions", for instance hölderian functions with Hölder coefficient  $\mu \leq 1/2$  (see [7]). This few remarks naturally lead us to ask whether the existence theorems of section 4 still hold taking the boundary data in some intermediate spaces, for instance in  $L^2(\partial\Omega)$ . This program, which goes back to A.P. Calderón (see [19], p. 255), has been carried out, at least for domains with connected boundaries<sup>20</sup>, not only for the Laplace equation, but also for elliptic systems and some relevant systems of mathematical physics, thanks to the fundamental results proved in [2], [9], [3] and [25]<sup>21</sup>.

In this section we aim just at extending the results by [25] to *domains with compact boundaries in any dimension*.

Let  $\Gamma = \{\Gamma_\xi\}_{\xi \in \partial\Omega}$ , with  $\Gamma_\xi = \{x \in \Omega : |x - \xi| \leq \lambda \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\}$ ,  $\xi \in \partial\Omega$ , where  $\lambda > 1$  is a constant depending on the Lipschitz character of  $\Omega$ . If  $u$  is a function on  $\Omega$ , the non-tangential maximal function  $u_*$  of  $u$  is defined by

$$u_*(\xi) = \sup_{x \in \Gamma_\xi} |u(x)|.$$

Also,  $u$  is said to converge non-tangentially to a function  $a$  on  $\partial\Omega$  (with respect

<sup>19</sup>It is worth noting that  $v = x_i \partial_{x_i} u$ , where  $u$  is De Vito's function, belongs to a  $L^2(C)$  and vanishes almost everywhere on  $\partial C$  [7]. Moreover  $u$  is zero on the diameter  $(x_1, 0)$  so that it is also a solution to the mixed problem in  $\{(x_1, x_2) \in \mathcal{B} : x_1 > 0\}$  corresponding to zero data (cf. also [6]).

<sup>20</sup>See footnote 1

<sup>21</sup>See the bibliography in [15].

to the non-tangential approach regions  $\Gamma$ ) if

$$(5.1) \quad u \xrightarrow{\text{nt}} a \iff \lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ (x \in \Gamma_\xi)}} u(x) = a(\xi)$$

The following lemma is a consequence of a deep theorem by R. Coifman, A. McIntosh and Y. Meyer [3] (see also [19], [9] and [25]).

**Lemma 5.1.** *The maps  $\mathcal{K}_0^*$  and  $\mathcal{K}_1$  are continuous in  $L^2(\partial\Omega)$  and  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  respectively. Moreover*

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \|(\mathcal{K}[\varphi])_*\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq c\|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ \|(\mathcal{K}[\varphi])_*\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)} &\leq c\|\varphi\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)} \\ \|(\mathcal{K}^*[\psi])_*\|_{L^2(\partial\Omega)} &\leq c\|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

and (3.5), (3.13) are satisfied almost everywhere in the sense on non-tangential convergence (5.1).

In virtue of general theorems of functional analysis  $\mathcal{K}_0$  and  $\mathcal{K}_1^*$  are continuous extensions of  $\mathcal{K}$  and  $\mathcal{K}^*$  to  $L^2(\partial\Omega)$  and  $W^{-1,2}(\partial\Omega)$  respectively. Of course  $\text{Kern } \mathcal{K} = \text{Kern } \mathcal{K}_1$  and  $\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_1)$ .

**Lemma 5.2.** *Let  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ . Then  $\partial_\nu w_{(i)}(\varphi), \partial_\nu w_{(e)}(\varphi) \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$  and*

$$(5.3) \quad \partial_\nu w(\varphi)_{(i)} = \partial_\nu w(\varphi)_{(e)}$$

PROOF - Let  $\Omega$  be exterior and let  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  be a sequence of  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  which converges to  $\varphi$  in  $L^2(\partial\Omega)$ . Since by Lemma 2.1  $\partial_\nu w(\varphi_k)_{(i)} \in L^2(\partial\Omega)$ , we have

$$\left| \int_{\partial\Omega} z \partial_\nu w(\varphi_k)_{(i)} d\sigma \right| = \left| \int_{\partial\Omega} \varphi_k \partial_\nu w(z)_{(i)} d\sigma \right| \leq c\|\varphi_k\|_{L^2(\partial\Omega)} \|z\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)},$$

for every  $z \in W^{1,2}(\partial\Omega)$ . Hence it follows that the sequence of functionals in  $W^{-1,2}(\partial\Omega)$  defined by  $\partial_\nu w(\varphi_k)_{(i)}$  is a fundamental one so that it converges to an element of  $W^{-1,2}(\partial\Omega)$ . Of course, the same argument applies to show that  $\partial_\nu w(\varphi_k)_{(e)}$  is defined in  $W^{-1,2}(\partial\Omega)$ . Moreover, from Lemma 3.1 it follows that

$$\int_{\partial\Omega} z \partial_\nu w(\varphi_k)_{(i)} d\sigma = \int_{\partial\Omega} z \partial_\nu w(\varphi_k)_{(e)} d\sigma,$$

for every  $z \in W^{1,2}(\partial\Omega)$  so that (5.3) holds true. The case of  $\Omega$  bounded is treated in the same way.  $\square$

Analogously, we have

**Lemma 5.3.** *Let  $\psi \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ . Then  $v_{(i)}(\psi), v_{(e)}(\psi) \in L^2(\partial\Omega)$  and*

$$v_{(i)}(\psi) = v_{(e)}(\psi)$$

Proceeding as we made in the proof of Lemma 5.2, *i.e.*, by approximating  $\varphi \in L^2$  and  $\psi \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$  by sequences in  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  and  $L^2(\partial\Omega)$  respectively, we easily obtain

**Lemma 5.4.** *Let  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$ ,  $\psi \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ . Then, for every  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  and every  $z \in W^{1,2}(\partial\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  solution to equation  $\Delta z = f$ <sup>22</sup>,*

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} w(\varphi) f \, dv &= \pm \int_{\partial\Omega} w(\varphi) \partial_{\nu} z \, d\sigma \mp \langle \partial_{\nu} w(\varphi), z \rangle, \\ \int_{\Omega} v(\psi) f \, dv &= \pm \int_{\partial\Omega} v(\psi) \partial_{\nu} z \, d\sigma \mp \langle \partial_{\nu} v(\psi), z \rangle, \end{aligned}$$

where we have to choose the signs  $+$  and  $-$  for  $\Omega$  bounded and exterior respectively.

Hence it follows that  $w(\varphi), v(\psi)$  are the weak solutions to the Dirichlet, Neumann and Robin problems corresponding respectively to data  $w(\varphi)|_{\partial\Omega}, v(\psi)|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ ,  $\partial_{\nu} w(\varphi)|_{\partial\Omega}, \partial_{\nu} v(\psi)|_{\partial\Omega} \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$  and  $[\alpha w(\varphi) \pm \partial_{\nu} w(\varphi)]|_{\partial\Omega}, [\alpha v(\psi) \pm \partial_{\nu} v(\psi)]|_{\partial\Omega} \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ .

We are now in a position to prove our main result.

**Theorem 5.1.** *The operators  $\mathcal{K}_0$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0$  are fredholmian in  $L^2(\partial\Omega)$ . Moreover,  $\mathcal{K}_1$  and  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_1$  are fredholmian in  $W^{1,2}(\partial\Omega)$  and*

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \text{Kern } \mathcal{K}_0 &= \mathcal{K} = \mathcal{K}_1, \\ \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0) &= \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_1) \end{aligned}$$

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \text{Kern } \mathcal{K}_1^* &= \mathcal{K}^* = \mathcal{K}_0^*, \\ \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_1^*) &= \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}^*) = \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*). \end{aligned}$$

PROOF - Let  $\Omega$  be exterior. In virtue of Lemmas 4.1, 5.1  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*$  is an isomorphism of  $L^2(\partial\Omega)$  and, as consequence  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0$  is fredholmian in  $L^2(\partial\Omega)$  and (5.5)<sub>2</sub> holds. If  $\Omega$  is bounded, then on appealing once again to Lemmas 4.1, 5.1 we see that  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*$  is an isomorphism from  $L_{\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0^*)}^2(\partial\Omega)$  onto  $L_{\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K})}^2(\partial\Omega)$ . Hence, taking into account that  $\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}) \subset \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0)$  it follows that  $\text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}) = \text{Kern } (\mathcal{I} + \mathcal{K}_0)$  and as a consequence that the map  $\mathcal{I} + \mathcal{K}_0$  is

<sup>22</sup>See footnote2.

fredholmian in  $L^2(\partial\Omega)$ . The proof that  $\mathcal{K}_0$  is fredholmian and  $(5.5)_1$  holds is achieved by an analogous argument.

If  $\Omega$  is exterior, by Lemmas 4.1, 5.1, we have that,  $\mathcal{K}_1$  is an isomorphism from  $W_{\perp \text{Kern } \mathcal{K}_1}^{1,2}(\partial\Omega)$  onto  $W_{\text{Kern } \mathcal{K}_1}^{1,2}(\partial\Omega)$ . Hence the desired result follows by noting that  $\text{Kern } \mathcal{K}^* \subset \text{Kern } \mathcal{K}_1^*$ . The proof of the remaining cases are quite analogous to the above one.  $\square$

*Remark 5.1* - Relations 5.5 can be proved directly by only using Lemmas 5.4 and 5.3. Indeed, let  $\varphi \in \text{Kern } \mathcal{K}_0[\varphi] = 0$ . If  $\Omega$  is exterior, then, choosing  $z_{\partial\Omega} = 0$  in (5.4), we have that  $w(\varphi) = 0$  in  $\Omega$  so that  $\partial_\nu w_{(i)} = 0$ . Therefore, taking into account (5.3) and choosing  $\partial_\nu z_{\partial\Omega} = 0$  in (5.4), we see that  $[w(\varphi)f]_\Omega = 0$ , for every  $f$  such that  $f_\Omega = 0$ . Hence it follows that  $w(\varphi)$  is constant in any  $\Omega_j$  and so  $(5.5)_1$ . The proof of  $(5.5)_1$  for  $\Omega$  bounded and of  $(5.5)_2$  is obtained by the same argument.  $\diamond$

We are now in a position to show that the weak and strong solutions to the boundary value problem we consider can be expressed by layer potentials.

**Theorem 5.2.** *Let  $s \in L^2(\partial\Omega)$  [resp.  $s \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ ] satisfy (2.8) if  $\Omega$  is bounded. Then the strong [weak] solution to the Neumann problem is expressed by a simple layer potential  $v(\psi)$  with  $\psi \in L^2(\partial\Omega)$  [resp.  $\psi \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ ]. Moreover,*

$$(5.7) \quad \|(\nabla v(\psi))_\star\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla v(\psi)\|_{W_{\text{loc}}^{1/2,2}(\Omega)} \leq c\|s\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

and  $\partial_{\nu_\epsilon} v(\psi) \xrightarrow{\text{nt}} s$ .

**PROOF** - The representation of the solution as a simple layer potential is an obvious consequence of Theorem 5.1. The estimate (5.2) is proved by appealing to Lemma 5.1 and a well-known technique [8].  $\square$

Of course a result analogous to the above one for the Robin problem holds true, at least for  $n > 2$  if  $\Omega$  is exterior.

As far as Dirichlet problem is concerned, we aim here at deriving existence in general Lipschitz domains by using another approach, we deem more simple and direct.

Denote by  $\mathcal{H}^2(\Omega)$ ,  $p \in (1, +\infty)$ , the linear space of all harmonic functions  $u$  in  $\Omega$  such that  $u_\star \in L^2(\partial\Omega)$ .

**Theorem 5.3.** *Let  $a \in L^2(\partial\Omega)$  [resp.  $W^{1,2}(\partial\Omega)$ ] and assume  $n \geq 3$  for  $\Omega$  bounded. Then the weak [resp. strong] solution  $u$  to the Dirichlet problem is*

expressed by<sup>23</sup>

$$(5.8) \quad u(x) = v(\varphi) \mp w(\varphi) + \kappa,$$

with  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$  [resp.  $W^{1,2}(\partial\Omega)$ ] uniquely determined by  $a$  and  $\kappa$  given by<sup>24</sup>

$$(5.9) \quad \kappa = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} a \psi_\ell d\sigma, & \lambda_c(\Omega) = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover,

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \|u_\star\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|u\|_{W_{\text{loc}}^{1/2,2}(\Omega)} &\leq c\|a\|_{L^2(\partial\Omega)}, \\ \|(\nabla u)_\star\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla u\|_{W_{\text{loc}}^{1/2,2}(\Omega)} &\leq c\|a\|_{W^{1,2}(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

$u \xrightarrow{\text{nt}} a$  and is unique in the classes

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b(\Omega) &= \{z \in \mathcal{H}^2(\Omega) : z \xrightarrow{\text{nt}} a, z_\star \in L^2(\partial\Omega)\}, \\ \mathcal{A}_e(\Omega) &= \{z \in \mathcal{H}^2(\Omega) : z \xrightarrow{\text{nt}} a, z_\star \in L^2(\partial\Omega), z = o(\log^\chi r)\}, \end{aligned}$$

for  $\Omega$  bounded and exterior respectively, where  $\chi$  is equal to 1, for  $n = 2$ , and to 0, for  $n > 2$ .

PROOF - We prove existence for  $\Omega$  plane exterior domain and  $\lambda_c(\Omega_0) = 1$ . The proof in the remaining cases is almost trivial. Let  $\Omega$  be exterior. Looking for a solution in the form (5.8), we are led to solve the integral equation

$$(5.11) \quad v(\varphi) - \mathcal{K}_0[\varphi] = a - \kappa$$

in  $L^2(\partial\Omega)$ . Since  $v(\varphi)$  is compact on  $L^2(\partial\Omega)$ , the operator  $v - \mathcal{K}_0$  is fredholmian in  $L^2(\partial\Omega)$ . On the other hand, if  $\psi \in \text{Kern}(v - \mathcal{K}_0^\star)$ , then  $v(\psi) + \partial_\nu v(\psi)_{(i)} = 0$  on  $\partial\Omega$ . Hence it follows that  $v(\psi) = 0$  in  $\Omega'$  and, since  $\lambda_c(\Omega) = 1$ , that  $\text{Kern}(v - \mathcal{K}_0^\star) = \mathcal{C}$ . Therefore, choosing  $\kappa$  according to (5.9), we see that equation (5.11) is uniquely solvable in  $L_{\text{Kern}(v - \mathcal{K}_0)}^2(\partial\Omega)$ . Analogously, we prove that (5.11) is uniquely solvable in  $W_{\text{Kern}(v - \mathcal{K}_0)}^{1,2}(\partial\Omega)$ . Estimates 5.10 are proved by taking into account Lemma 5.2 and making use of an argument in [8]. The uniqueness of  $u$  in  $\mathcal{A}_b(\Omega)$  is proved by a standard technique based on the construction of the Green function<sup>25</sup>. To get uniqueness in  $\mathcal{A}_e(\Omega)$ , it is

<sup>23</sup>See footnote2.

<sup>24</sup>See Remark 3.2

<sup>25</sup>See [9], p.183, 184.

sufficient to show that, if  $z \in \mathcal{A}_e(\Omega)$  and  $z \xrightarrow{nt} 0$ , then  $z = 0$  in  $\Omega$ . To this end, consider the solution  $z^*$  to the Dirichlet problem in  $A_b(\Omega^* \setminus \Omega_0)$  with boundary condition  $z^* = 0$  on  $\partial\Omega$  and  $z^* = z|_{\partial\Omega^*}$  on  $\partial\Omega^*$ , where  $\Omega^*$  is a bounded regular domain, with a connected boundary, containing  $\Omega_0$  and such that  $\lambda_c(\Omega^*) \neq 1$ , for  $n = 2$ . Since by the uniqueness theorem in bounded domain  $z = z^*$  in  $\Omega^* \setminus \Omega_0$ , we have that  $z \in W^{1,2}(\Omega^* \setminus \Omega_0)$  so that  $z$  is a variational solution and the desired result easily follows by a standard argument, taking also into account Lemma 3.3.  $\square$

Of course, a weak solution to the Dirichlet problem in a plane exterior domain vanishing at infinity exists if and only if  $a \in L^2(\partial\Omega)$  satisfies the compatibility condition (4.5).

If  $\Omega$  is a plane bounded domain, then, by making use of the argument used in the proof of Theorem 4.1, we see that the weak solution to the Dirichlet problem is expressed by  $w(\varphi) + v(\psi)$ , with  $\phi \in L^2(\partial\Omega)/\text{Kern}(\mathcal{I} + \mathcal{K})$  and  $\psi \in \text{Kern}(\mathcal{I} + \mathcal{K}^*)$ , uniquely determined by  $a$ .

*Remark 5.2* - Let be a constant fourth-order tensor  $\mathbf{C}$  (linear map from  $\mathbb{R}^{n^2}$  into  $\mathbb{R}^{n^2}$ ) such that

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}] \geq \mu \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{F}] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}]$$

for any pair of second-order tensors  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{F}$  (linear maps from  $\mathbb{R}^n$  into  $\mathbb{R}^n$ ), where the positive constant  $\mu$  is independent of  $\mathbf{E}$ . The Dirichlet and Robin problem associated with the elliptic system

$$(5.12) \quad \text{div } \mathbf{C}[\nabla \mathbf{u}] = \mathbf{0},$$

consist in finding solutions  $\mathbf{u} = u_i(x)$  to (5.12) which satisfies respectively the boundary conditions

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{A}[\mathbf{u}] \pm \mathbf{C}(\nabla \mathbf{u})\nu &= \mathbf{s} \end{aligned}$$

where  $\mathbf{A}$  is a positive semi-definite constant second order tensor and we have to choose the sign  $+$  [resp  $-$ ] for  $\Omega$  bounded [resp. exterior]. When  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ , then system (5.12)–(5.13)<sub>2</sub> is known as Neumann problem.

For any couple of densities  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$  e  $\psi \in W^{-1,2}(\partial\Omega)$ , the layer potentials are defined by

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{C}(\nabla U(x - \zeta))(\varphi \otimes \mathbf{n})(\zeta) d\sigma_\zeta \\ v(\psi) &= -\langle \psi, U(x - \zeta) \rangle, \end{aligned}$$

where  $U(x - y)$  is the fundamental solution to system (5.12) (cf. [13]), are analytic solutions to system (5.12) in  $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$ . By reasoning as we made in the previous sections it is not too difficult to verify that the trace operator associated with the layer potential (5.2)<sub>1</sub> is Fredholmian in  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  and  $L^2(\partial\Omega)$  so that the existence and uniqueness theorems proved above for the Laplace equation hold true for system (5.12), (5.13) too. Nevertheless, it is worth noting that, by repeating the argument in Lemma 3.6 we can construct a basis  $\{(\psi_i)_{\partial\Omega}\}$  of  $\text{Kern } \mathcal{K}^* \subset L^2(\partial\Omega)$ , for  $\Omega$  exterior domain, such that:

(i) the first  $n$  densities are such that the system  $\{(\psi_i)_{\partial\Omega}\}$  is a basis of  $\text{di } \mathbb{R}^n$ ;

(ii)  $v(\psi_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is constant on  $\partial\Omega$ ;

(iii) the remaining  $(n - 1)m$  densities have zero integral mean on  $\partial\Omega$ .

Hence, taking into account Remark 4.1 it follows that, if  $\Omega$  is exterior and  $n = 2$ , then the Dirichlet problem with datum  $a \in L^2(\partial\Omega)$  admits a solution  $w(\varphi) + v(\psi)$ , with  $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$  and  $\psi \in \text{Kern } \mathcal{K}^*$ , if and only if

$$\int_{\partial\Omega} \psi_i \cdot a \, d\sigma = 0, \quad \forall i = \dots, n.$$

◇

## References

- [1] J. BERGH AND LÖFSTRÖM: *Interpolation spaces. An introduction*. Springer (1976).
- [2] A.P. CALDERÓN: Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **74** (1977), 1324–1326.
- [3] R.R. COIFMAN, A. MCINTOSH AND Y. MEYER: L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes Lipschitziennes, *Ann. Math.* **116** (1982), 361–388.
- [4] M. COSTABEL: Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results\*, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1986), 613–626.
- [5] B.J. DAHLBERG, C.E. KENIG AND G.C. VERCHOTA: Boundary value problems for the systems of elastostatics in Lipschitz domains, *Duke Math. J.* **57** (1988), 795–818.



- [6] E. DE GIORGI: Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno di tipo misto., *Ricerche Mat.* **2** (1953), 183–191
- [7] L. DE VITO : Sulle funzioni ad integrale di Dirichlet finito, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (III)* **12** (1958), 55–127
- [8] E.B. FABES: Layer potential methods for boundary value problems on Lipschitz domains, *Lecture Notes in Math.* **1344** (1987), Springer-Verlag, 55–80.
- [9] E.B. FABES, M. JODEIT JR. AND N.M. RIVIÈRE: Potential techniques for boundary value problems on  $C^1$  domains, *Acta Math.* **141** (1978), 165–185.
- [10] E.B. FABES, C.E. KENIG AND G. VERCHOTA: The Dirichlet problem for the Stokes system on Lipschitz domains, *Duke Math.* **57** (1988), 769–793.
- [11] E. GAGLIARDO: Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili, *Rend. Sem. Mat. Padova* **27** (1957), 284–305.
- [12] N.M. GUNTHER: *La Théorie du Potentiel et ses Applications aux Problèmes Fondamentaux de la Physique Mathématique*, Gauthier-Villars (1934).
- [13] F. JOHN: *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience (1955)
- [14] N. KALTON AND M. MITREA, Stability results on interpolation scales of quasi-Banach spaces and applications, *Tran. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), 3903–3922
- [15] C.E. KENIG: *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems*, CBMR Regional Conference Series in Mathematics **83** (1994), AMS.
- [16] O.D. KELLOG: *Foundations of Potential Theory*, Grundlehren der Math. Wiss., Springer-Verlag (1929).
- [17] R. KRESS: *Linear integral equations*, Springer-Verlag (1989).
- [18] A. KUFNER, O. JOHN AND S. FUČIK, *Function spaces*, Noordhooff (1977).

- [19] Y. MEYER AND R.R. COIFMAN: *Wavelets. Calderón-Zygmund and multilinear operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **48**, Cambridge University Press (1997).
- [20] C. MIRANDA: Sulla sommabilità delle derivate di una funzione armonica hölderiana, *Rend. Acc. Sci. Napoli* (1951), 84–87.
- [21] C. MIRANDA: *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer-Verlag, 1970.
- [22] C. MIRANDA : *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, vol. I, II, Oderisi Editrice, Gubbio (1978).
- [23] J. NEČAS: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson-Paris and Academie-Prague (1967).
- [24] R. TEMAM [1977]: *Navier-Stokes equations*, North-Holland.
- [25] G. VERCHOTA: Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains, *J. Funct. Anal.* **59** (1984), 572–611

## ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI

Il *Rendiconto* pubblica, di norma in lingua italiana, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Nella stesura della *Nota* si raccomanda l'uso di Microsoft® Word 2000 o in alternativa di LaTeX™. Le *note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom). La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito.

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto e stampati con una stampante laser dalla buona risoluzione (600 dpi). Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere stampate ad alto contrasto. Una copia a bassa risoluzione o una fotocopia di ciascuna fotografia, grafico o disegno, sarà collocata opportunamente nel dattiloscritto accompagnata dalla relativa didascalia, l'originale sarà sempre allegato a parte. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti Bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate nell'esempio in *Appendice*.

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori sarà superiore a uno. Ulteriori estratti e/ o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che comunicherà l'ammontare della spesa.

**Abstract** - Abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified;

Al termine lasciare vuoto 1.5 righe

**Riassunto** - Scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato.

Al termine del secondo riassunto si lasciano vuoti 2 righe e si digita a sinistra in **grassetto maiuscolo con caratteri TNR 9** il titolo del primo paragrafo che deve essere Introduzione.

## 1 - INTRODUCTION

Si lascia 0.5 righe e si inizia la digitazione con caratteri **TNR 11 giustificato** indentando i capoversi di 0.6 cm.

Primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione.

.....

Ultimo capoverso dell'introduzione. Ricordarsi che i capoversi vanno indentati di 0.6 cm.

Dopo questa sezione, e fra la fine di una sezione e l'intestazione dell'altra, si lasciano vuoti due righe. Si usa il **grassetto maiuscolo TNR 9** per tutte le intestazioni che saranno separate dal corpo della rispettiva sezione di 0.5 righe e per il corpo delle sezioni si useranno caratteri **TNR 11**, come per la sezione INTRODUZIONE. L'ultima sezione deve essere sempre RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). Se esistono, mettere nell'ordine, le seguenti sezioni: 2 - MATERIALI E METODI (MATERIALS AND METHODS), 3 - RISULTATI (RESULTS), 4 - DISCUSSIONE (DISCUSSION), o CONCLUSIONI (CONCLUSIONS), 5 -RIFERIMENTI

## *APPENDICE*

### NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

#### **Prima pagina.**

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

**La Secca delle Formiche di Vivara  
(canale d'Ischia, Campania)  
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche**

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11:**

Nota di Vincenzo Rosso<sup>1</sup>, Nicola Verde<sup>2</sup> e Pasquale Bianco<sup>1,\*</sup>

A distanza di 0.5 rigi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con **caratteri TNR 9:**

Presentata dal socio Michele Russo  
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 rigi digitare in lingua inglese le Key words con **caratteri TNR 9** come indicato:

*Key words:* stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 rigi digitare, come indicato, due riassunti con **caratteri TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

**Analisi sismologiche fatte  
nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980**  
Nota di Vincenzo Rosso<sup>1</sup>, Nicola Verde<sup>2</sup> e Pasquale Bianco<sup>1\*</sup>

Presentata dal socio Michele Russo  
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

*Key words* : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

**Abstract** - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

**Riassunto** - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

## 1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione,  
primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo  
capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo  
capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a piè pagina si inserisce)

---

<sup>1,2..</sup> Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori

\* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

**BIBLIOGRAFICI (REFERENCES).** I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo:**

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome*. Science, 230, 157-163.

Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics*. Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di **RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI** usando **TMS 9**.

Es:

**Acknowledgements:** i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a piè pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

---

<sup>1</sup> Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

\* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)

